Übungen zur Höheren Mathematik für Physiker II **Blatt 5**

Prof. Dr. R. Weissauer
Mirko Rösner

Sommersemester 2014
Abgabe bis 16.05.14 um 11:15 in INF 288.

---

1. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen.

(a) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Produkt fg stetig ist. Zeigen Sie, dass die Summe $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

(b) Zeigen Sie: Jede Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} p_k x^k$ mit Koeffizienten $p_k \in \mathbb{R}$ ist stetig.

2. Aufgabe: (4 Punkte) Seien (M, d) und (N, d) metrische Räume und $f : M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) f ist stetig im Sinne von Definition 2.1 im Skript,

(b) für alle offenen $\mathcal{O} \subseteq N$ ist $f^{-1}(\mathcal{O}) = \{m \in M \mid f(m) \in \mathcal{O}\}$ wiederum offen in M.

3. Aufgabe: (4 Punkte) Seien $L_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $L_2 : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ lineare Abbildungen für $n, m, k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Die Operatornorm von L_i zur euklidischen Norm ist für $i = 1, 2$ definiert als

$$\|L_i\| = \sup_{v \neq 0} \left(\frac{\|L_i v\|}{\|v\|} \right)$$

für v im Definitionsbereich von L_i. Zeigen Sie: $\|L_2 \circ L_1\| \leq \|L_2\| \cdot \|L_1\|$.

4. Aufgabe: (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Zeigen Sie, dass das Bild $f([a, b])$ des folgenkompakten Intervalls $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ wieder ein folgenkompaktes Intervall $[c, d] = f([a, b])$ ist.
Hinweis: Setzen Sie $c = \inf\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ und $d = \sup\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$ und zeigen Sie, dass c und d in $f([a, b])$ enthalten sind.

5. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Zeigen Sie mit dem ϵ-δ-Kriterium, dass

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^2$$

(a) stetig ist,

(b) nicht gleichmäßig stetig ist.
