1. Aufgabe: (3+3+2=8 Punkte) Sei $\omega = \sum_{\nu=1}^n \mathrm{d}q_\nu \wedge \mathrm{d}p_\nu \in A^2(\mathbb{R}^{2n})$ die kanonische 2-Form auf dem Phasenraum. Bestimmen Sie zur Hamiltonfunktion

$$h : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, \quad (q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n) \mapsto \sum_{k=1}^n a \cdot q_k^2 + b \cdot p_k^2$$

mit reellen Konstanten $a, b \geq 0$ jeweils das zugehörige Vektorfeld $X = X_h$ und den Hamiltonfluss $\varphi_t^X : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$,

(a) falls $a, b \neq 0$,

(b) falls $a = 0$.

(c) Rechnen Sie in beiden Fällen konkret nach, dass $(\varphi_t^X)^*(\omega) = \omega$.

Hinweis zu (a): Machen Sie einen Ansatz der Form

$$\varphi_t^X(q_1, \ldots, p_n) = (\cos(\lambda t)q_1 - c\sin(\lambda t)p_1, \ldots, c^{-1}\sin(\lambda t)q_n + \cos(\lambda t)p_n)$$

und bestimmen Sie die reellen Konstanten $\lambda, c \neq 0$.

Die symplektische Matrix ist gegeben durch $(\omega_{ij})_{ij} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$, also ist die Inverse $(\omega^{ij})_{ij} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Das Vektorfeld zur Hamiltonfunktion h ist gegeben durch

$$X_h = \{h, \cdot\} = \sum_{\nu=1}^n 2bp_\nu \partial_{q_\nu} - 2aq_\nu \partial_{p_\nu}.$$

Das zugehörige dynamische System löst die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\varphi_t(q,p)) = X_h(f(\varphi_t(q,p))) \tag{1}$$

für beliebige $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ mit der Anfangsbedingung $\varphi_{t=0}(q_\nu, p_\nu) = (q_\nu, p_\nu)$. Existenz und Eindeutigkeit von φ_t dieser Differentialgleichung folgen aus dem Satz von Picard. [Die Koeffizientenfunktionen von X_h sind Lipschitz-stetig.] Im Folgenden nehmen wir zur Erleichterung der Notation $n = 1$ an. [Sonst betrachtet man jeweils die Komponenten mit festem ν.]

(a) Falls $a, b \neq 0$, so erfüllt

$$\varphi_t(q_1, p_1) = (\cos(\lambda t)q_1 - c\sin(\lambda t)p_1, c^{-1}\sin(\lambda t)q_1 + \cos(\lambda t)p_1)$$

die Bedingung $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}$ und die Konstanten λ, c müssen wegen (1) die Bedingungen $c\lambda = -2b$ und $c^{-1}\lambda = -2a$ erfüllen. [Man kann für f die Projektion auf die Koordinaten einsetzen.] Man kann zum Beispiel $\lambda = 2\sqrt{ab}$ und $c = -\sqrt{b/a}$ wählen.

(b) Falls $a = 0$, so ist $\varphi_t(q_1, p_1) = (q_1 + 2tb \cdot p_1, p_1)$ eine Lösung der Differentialgleichung, da $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{s+t}$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t(q_1, p_1)|_{t=0} = (2bp_1, 0) = X(q_1, p_1)$.

(c) Im Fall $a, b \neq 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
(\varphi_t^X)^*(\omega) &= \sum_{\nu=1}^{n} (\varphi_t^X)^*(\mathrm{d}q_\nu \wedge \mathrm{d}p_\nu) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{d}\left(\cos(\lambda t) q_\nu - c \sin(\lambda t) p_\nu\right) \wedge \mathrm{d}\left(c^{-1} \sin(\lambda t) q_\nu + \cos(\lambda t) p_\nu\right) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \left(\cos(\lambda t) \mathrm{d}q_\nu - c \sin(\lambda t) \mathrm{d}p_\nu\right) \wedge \left(c^{-1} \sin(\lambda t) \mathrm{d}q_\nu + \cos(\lambda t) \mathrm{d}p_\nu\right) \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \cos^2(\lambda t) \mathrm{d}q_\nu \wedge \mathrm{d}p_\nu - c \sin(\lambda t) c^{-1} \sin(\lambda t) \mathrm{d}p_\nu \wedge \mathrm{d}q_\nu \\
&= \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{d}q_\nu \wedge \mathrm{d}p_\nu.
\end{aligned}
$$

Für $a = 0$ ist $\sum_{\nu=1}^{n} (\varphi_t^X)^*(\mathrm{d}q_\nu \wedge \mathrm{d}p_\nu) = \sum_{\nu=1}^{n} \mathrm{d}(q_\nu + 2tb \cdot p_\nu) \wedge \mathrm{d}p_\nu = \omega$, da $\mathrm{d}p_\nu \wedge \mathrm{d}p_\nu = 0$.

2. Aufgabe: (3 Punkte) Seien $f_1, \ldots, f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ reellwertige Funktionen mit der Eigenschaft $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ für alle i, j. Zeigen Sie, dass es ein $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ gibt, sodass $\partial_i g = f_i$ für alle i.

Man definiert eine Differentialform $\omega \in A^1(\mathbb{R}^n)$ durch $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i \mathrm{d}x_i$. Die Integrabilitätsbedingung $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ impliziert dann $\mathrm{d}\omega = 0$. Nach dem Poincare-Lemma ist ω exakt, es gibt also eine Nullform $g \in A^0(\mathbb{R}^n) = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\mathrm{d}g = \omega$. Daraus folgt $\partial_i g = f_i$.

3. Aufgabe: (2+2+2=6 Punkte) Es sei $f(\theta) = c_\emptyset + c_{\{1\}}\theta^1 + c_{\{2\}}\theta^2 + c_{\{1,2\}}\theta^1\theta^2$ ein Polynom in zwei antikommutierenden Variablen θ^1, θ^2 mit reellen Koeffizienten $c_I \in \mathbb{R}$ für $I \subseteq \{1, 2\}$. Berechnen Sie

(a) die Involution $(f(\theta))^*$,

(b) das Berezin-Integral $\int f(\theta)\mathrm{d}\theta$,

(c) die Fouriertransformierte $(\mathcal{F}_L f)(\eta)$ zu $q_L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q_L(x) = x_1^2 + 2 \cdot x_2^2$.

Die Involution * kehrt die Reihenfolge der θ_i um. Es gilt also

$$
\begin{aligned}
(f(\theta))^* =& (c_\emptyset + c_{\{1\}}\theta^1 + c_{\{2\}}\theta^2 + c_{\{1,2\}}\theta^1\theta^2)^* \\
=& c_\emptyset + c_{\{1\}}\theta^1 + c_{\{2\}}\theta^2 + c_{\{1,2\}}\theta^2\theta^1 \\
=& c_\emptyset + c_{\{1\}}\theta^1 + c_{\{2\}}\theta^2 - c_{\{1,2\}}\theta^1\theta^2.
\end{aligned}
$$

Das Berezin-Integral ist

$$
\int f(\theta)\mathrm{d}\theta = -c_{\{1,2\}}.
$$

Die Fouriertransformierte $\mathcal{F}_L f(\theta)$ ist durch den Hodgeoperator $*_L(f(\theta)^*)$ gegeben [Satz 5.27 in der Skriptversion vom 4. Juli. Beachte $\epsilon_L = 1$.]. Also

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}_L f(\theta) = *_L(f(\theta)^*) =& c_\emptyset *_L(1) + c_{\{1\}} *_L(\theta^1) + c_{\{2\}} *_L(\theta^2) - c_{\{1,2\}} *_L(\theta^1\theta^2) \\
=& \sqrt{2}c_\emptyset \cdot \theta^1\theta^2 + \sqrt{2}c_{\{1\}} \cdot \theta^2 - \sqrt{1/2}c_{\{2\}} \cdot \theta^1 - \sqrt{1/2}c_{\{1,2\}}.
\end{aligned}
$$

Jetzt ersetzt man alle θ^i durch η^i.

4. Aufgabe: (1+1+2=4 Punkte) Die Eins-Form $\alpha \in A^1(\mathbb{R}^{2n})$ auf dem Phasenraum $\mathbb{R}^{2n}$ sei gegeben durch $\alpha(q,p) = \sum_{k=1}^n q_k \mathrm{d}p_k$. Berechnen Sie

(a) die Cartanableitung $\omega = \mathrm{d}\alpha$,

(b) den Pullback $J^*\alpha$ mit der Matrix $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$,

(c) die Kontraktion $i_X(\alpha)$ mit dem Vektorfeld $X(q,p) = \sum_{\nu=1}^n q_\nu \partial_{p_\nu}$.

Die Cartanableitung ist $\omega = \mathrm{d}\alpha = \sum_{k=1}^n \mathrm{d}q_k \wedge \mathrm{d}p_k$.
Der Pullback mit J ist $J^*(\alpha) = \sum_{\nu=1}^n p_\nu \mathrm{d}(-q_\nu) = -\sum_{\nu=1}^n p_\nu \mathrm{d}q_\nu$.
Die Kontraktion ist $i_X(\alpha)(q,p) = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^n q_\nu q_k \delta_{k,\nu} = \sum_{k=1}^n q_k^2 = \|q\|^2$.

5. Aufgabe: (1+1+2+2+2=8 Bonuspunkte) Sei $U \subseteq (\mathbb{R}\mathrm{m})^3$ eine offene Teilmenge des Ortsraumes und sei

$$L : U \times (\mathbb{R}\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^3 \times (\mathbb{R}\mathrm{s}) \to \mathbb{R}\mathrm{J}, \quad L(\mathbf{q},\mathbf{x},t) = \tfrac{m}{2}\|\mathbf{x}\|^2 + e\sum_{i=1}^3 x_i A_i(\mathbf{q})$$

die Lagrangefunktion eines Elektrons mit Masse m und Ladung e im Magnetfeld mit Vektorpotential $\mathbf{A} : U \to (\mathbb{R}\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}})^3$.

(a) Bestimmen Sie die kanonischen Impulse $p_i(\mathbf{q},\mathbf{x},t) = \frac{\partial L}{\partial x_i}$.

(b) Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion $H(\mathbf{q},\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^3 x_i p_i - L(\mathbf{q},\mathbf{x},t)$.

(c) Zeigen Sie, dass $\psi : (\mathbf{q},\mathbf{x},t) \mapsto (\mathbf{q},\mathbf{p}(\mathbf{q},\mathbf{x},t),t)$ invertierbar ist und bestimmen Sie die Funktion $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$.

(d) Bestimmen Sie $h(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = H(\mathbf{q},\mathbf{x}(\mathbf{q},\mathbf{p},t),t)$ und formulieren Sie die Bewegungsgleichungen für den Hamiltonfluß $\varphi_t = (\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t),t)$.

(e) Zeigen Sie, dass im Fall $\operatorname{rot}\mathbf{A} = 0$ der Hamiltonfluss die Bewegungsgleichung eines kräftefreien Teilchen $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 t}\mathbf{q}(t) = 0$ beschreibt.

Antwort:

(a) Die verallgemeinerten Impulse sind $p_i(\mathbf{q},\mathbf{x},t) = \frac{\partial L}{\partial x_i} = m x_i + e \cdot A_i(\mathbf{q})$.

(b) Die Hamiltonfunktion ist

$$H(\mathbf{q},\mathbf{x},t) = \sum_{i=1}^3 (m x_i^2 + e \cdot x_i A_i(\mathbf{q})) - \tfrac{m}{2}\|\mathbf{x}\|^2 - e\sum_{i=1}^3 x_i A_i(\mathbf{q}) = \tfrac{m}{2}\|\mathbf{x}\|^2.$$

(c) Man schreibt $x_i = x_i(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \frac{p_i}{m} - \frac{e}{m} \cdot A_i(\mathbf{q})$ und prüft nach, dass das eine Inverse liefert.

(d) Die Hamilton-Funktion in kanonischen Variablen ist

$$h(\mathbf{q},\mathbf{p},t) = \tfrac{m}{2}\|\mathbf{x}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)\|^2 = \tfrac{m}{2}\sum_{i=1}^3 (\tfrac{1}{m}p_i - \tfrac{e}{m} \cdot A_i(\mathbf{q}))^2 = \tfrac{1}{2m}\|p_i - e \cdot A_i(\mathbf{q})\|^2.$$

Die Funktionen $q_i(t)$ und $p_i(t)$ bezeichnen nun die Koordinaten des Hamilton-Flusses. Die Hamilton-Bewegungsgleichungen dazu lauten

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q_i(t) &= \dot{q}_i(t) \overset{!}{=} \{h, q_i\} = \frac{\partial h}{\partial p_i} = \frac{1}{m}(p_i - e \cdot A_i(\mathbf{q})),\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p_i(t) &= \dot{p}_i(t) \overset{!}{=} \{h, p_i\} = -\frac{\partial h}{\partial q_i} = \frac{e}{m}\sum_{j=1}^{3}(p_j - e \cdot A_j(\mathbf{q}))\frac{\partial A_j}{\partial q_i}(\mathbf{q}).\end{aligned}$$

(e) Aus $\mathbf{rot}\,\mathbf{A} = 0$ folgt $\frac{\partial A_j}{\partial q_i} = \frac{\partial A_i}{\partial q_j}$ für $i, j = 1, 2, 3$. Damit gilt

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 t}q_i(t) &= \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(p_i - e \cdot A_i(\mathbf{q})\right)\\ &= \frac{1}{m}\left(\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}t} - e \cdot \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_i(\mathbf{q})}{\partial q_j}\frac{\mathrm{d}q_j}{\mathrm{d}t}\right)\\ &= \frac{e}{m^2}\left(\sum_{j=1}^{3}(p_j - e \cdot A_j(\mathbf{q}))\frac{\partial A_j}{\partial q_i}(\mathbf{q}) - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial A_i(\mathbf{q})}{\partial q_j}(p_j - e \cdot A_j(\mathbf{q}))\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$