

Aufgabe: Die geschlossene Differentialform

$$\omega \in A^2(\mathbb{R}^n), \omega(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \omega_{ij}(x) dx_i \wedge dx_j$$

sei nicht entartet; das bedeutet, die Inverse $(\omega^{ij}(x))_{i,j} = (\omega_{ij}(x))_{i,j}^{-1}$ der antisymmetrisch ergänzten Koeffizientenmatrix existiert für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie für $1 \leq \nu, i, j \leq n$ die Formel

$$\partial_\nu \omega^{ij} = - \sum_{a,b=1}^n \omega^{ia} \partial_\nu (\omega_{ab}) \omega^{bj}.$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $\partial_\nu (\sum_{a=1}^n \omega^{ia} \omega_{ab})$.

(b) Die Poissonklammer von $f, g \in C^\infty(U)$ ist $\{f, g\} = \sum_{i,j=1}^n (\partial_i f) \omega^{ij} (\partial_j g)$. Zeigen Sie für $f, g, h \in C^\infty(U)$ die Jacobi-Identität

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0.$$

Lösung:

Die antisymmetrisch ergänzte Koeffizientenmatrix $A = (\omega_{ij})_{i,j}$ hat nach Definition die Einträge $\omega_{ii} = 0$ sowie $\omega_{ij} := -\omega_{ji}$ für $i > j$. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir $\partial_\nu \omega_{ij} = \omega_{ij,\nu}$ und analog $\partial_\nu \omega^{ij} = \omega^{ij}_{,\nu}$ für die partielle Ableitung nach x_ν . Bei der partiellen Ableitung $\partial_\nu f = f_\nu$ lassen wir das Komma weg, da keine Missverständnisse möglich sind. Die Symmetrie der Hessematrix liefert $f_{ji} = \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f = f_{ij}$. Summationsindizes laufen immer von 1 bis n .

a) Zu zeigen ist

$$\partial_\nu \omega^{ij} = - \sum_{a,b} \omega^{ia} \partial_\nu (\omega_{ab}) \omega^{bj}.$$

Zunächst ist $\sum_a \omega^{ia} \omega_{ab} = (A^{-1}A)_{ib} = \delta_{ib}$ nach Definition der Eintrag an der Stelle (i, b) der Einheitsmatrix. Die Ableitung nach ν ist also $\partial_\nu (\sum_a \omega^{ia} \omega_{ab}) = \delta_{ib,\nu} = 0$. Die Produktregel liefert

$$0 = \delta_{ib,\nu} = \partial_\nu (\sum_a \omega^{ia} \omega_{ab}) = \sum_a \omega^{ia}_{,\nu} \omega_{ab} + \sum_a \omega^{ia} \omega_{ab,\nu}.$$

Das bedeutet $(\partial_\nu A^{-1})A + A^{-1}(\partial_\nu A) = 0$. Multiplikation von rechts mit A^{-1} liefert $(\partial_\nu A^{-1}) + A^{-1}(\partial_\nu A)A^{-1} = 0$, also in Komponenten

$$\partial_\nu \omega^{ij} = \omega^{ij}_{,\nu} = - \sum_{a,b} \omega^{ia} (\omega_{ab,\nu}) \omega^{bj}. \quad (1)$$

b) Da ω geschlossen ist, gilt

$$0 = d\omega = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \omega_{ij,k} dx_k \wedge dx_i \wedge dx_j = \sum_{i < j < k} (\omega_{ij,k} + \omega_{jk,i} + \omega_{ki,j}) dx_i \wedge dx_j \wedge dx_k;$$

also gilt insbesondere für jedes $i < j < k$

$$\omega_{ij,k} + \omega_{jk,i} + \omega_{ki,j} = 0. \quad (2)$$

Ab jetzt verwenden wir die Einsteinsche Summenkonvention: Über mehrfach vorkommende Indizes in Produkten wird jeweils stillschweigend von 1 bis n summiert. Nach Definition gilt für $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} &= f_i \omega^{ij} \partial_j \{g, h\} = f_i \omega^{ij} \partial_j (g_k \omega^{kl} h_l) \\ &= f_i \omega^{ij} ((g_{kj} \omega^{kl} h_l) + (g_k \omega_{,j}^{kl} h_l) + (g_k \omega^{kl} h_{lj})) \\ &= f_i \omega^{ij} g_{kj} \omega^{kl} h_l + f_i \omega^{ij} g_k \omega_{,j}^{kl} h_l + f_i \omega^{ij} g_k \omega^{kl} h_{lj}. \end{aligned}$$

Die übrigen Terme behandelt man entsprechend und erhält neun Summanden:

$$\begin{aligned} &\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} \\ &= f_i \omega^{ij} g_{kj} \omega^{kl} h_l + f_i \omega^{ij} g_k \omega_{,j}^{kl} h_l + f_i \omega^{ij} g_k \omega^{kl} h_{lj} \\ &+ g_i \omega^{ij} h_{kj} \omega^{kl} f_l + g_i \omega^{ij} h_k \omega_{,j}^{kl} f_l + g_i \omega^{ij} h_k \omega^{kl} f_{lj} \\ &+ h_i \omega^{ij} f_{kj} \omega^{kl} g_l + h_i \omega^{ij} f_k \omega_{,j}^{kl} g_l + h_i \omega^{ij} f_k \omega^{kl} g_{lj}. \end{aligned}$$

Beginnen wir mit den Summanden in der mittleren Spalte (rot markiert). Doppelt vorkommende Indizes kann man umbenennen, da über diese summiert wird.

$$\begin{aligned} &f_i \omega^{ij} g_k \omega_{,j}^{kl} h_l + g_i \omega^{ij} h_k \omega_{,j}^{kl} f_l + h_i \omega^{ij} f_k \omega_{,j}^{kl} g_l \\ &= f_i \omega^{ij} g_k \omega_{,j}^{kl} h_l + g_k \omega^{kj} h_l \omega_{,j}^{li} f_i + h_l \omega^{lj} f_i \omega_{,j}^{ik} g_k \\ &= f_i g_k h_l (\omega^{ij} \omega_{,j}^{kl} + \omega^{kj} \omega_{,j}^{li} + \omega^{lj} \omega_{,j}^{ik}) \\ &\stackrel{(1)}{=} f_i g_k h_l (-\omega^{ij} \omega^{ka} \omega_{ab,j} \omega^{bl} - \omega^{kj} \omega^{la} \omega_{ab,j} \omega^{bi} - \omega^{lj} \omega^{ia} \omega_{ab,j} \omega^{bk}) \\ &= -f_i g_k h_l \omega^{ij} \omega^{ka} \omega^{bl} \underbrace{(\omega_{ab,j} + \omega_{bj,a} + \omega_{ja,b})}_{=0 \text{ wegen (2)}} = 0. \end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurden die Indizes wieder umbenannt und es wurde benutzt, dass $\omega^{ij} = -\omega^{ji}$, da die Inverse der antisymmetrischen Matrix A wieder antisymmetrisch ist [wegen ${}^t(A^{-1}) = ({}^t A)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$].

Nun betrachten wir die Summanden, in denen zweite Ableitungen von f vorkommen (blau markiert). Wieder können wir doppelt vorkommende Indizes in Produkten umbenennen. Wir benutzen die Symmetrie der Hessematrix $f_{ij} = f_{ji}$ und die Antisymmetrie $\omega^{ij} = -\omega^{ji}$, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} &h_i \omega^{ij} f_{kj} \omega^{kl} g_l + g_i \omega^{ij} h_k \omega^{kl} f_{lj} \\ &= h_i \omega^{ij} f_{kj} \omega^{kl} g_l + g_l \omega^{lk} h_i \omega^{ij} f_{jk} \\ &= g_l h_i f_{kj} \omega^{ij} (\omega^{kl} + \omega^{lk}) = 0. \end{aligned}$$

Die Summanden, in denen zweite Ableitungen von g bzw. h vorkommen, behandelt man entsprechend. Insgesamt ergibt sich also

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0,$$

was zu zeigen war.

Bemerkung: Wenn man die Schreibweise $f^j := f_i \omega^{ij}$ einführt, spart man sich viele Indizes wegen $\{f, g\} = f_i g^i$. Man muss dann aber $\partial_k f^j = \partial_k (f_i \omega^{ij}) = f_{ik} \omega^{ij} + f_i \omega_{,k}^{ij}$ beachten (Produktregel).