

Sie können die Produkt- und Kettenregel als bekannt voraussetzen. Sie dürfen verwenden, dass $\sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind mit $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$ und $\sin(0) = 0$, $\cos(0) = 1$.

1. Aufgabe: (2+2=4 Punkte)

- (a) Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $Df = 0$ in Q . Zeigen Sie, dass f konstant ist.
- (b) Zeigen Sie $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

2. Aufgabe: (2+2=4 Punkte) Bestimmen Sie mit Beweis die Ableitungen von

- (a) $\log : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$,
- (b) $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$.

Verwenden Sie die Definitionen von $\log$ und $\exp$ aus der Vorlesung.

3. Aufgabe: (4 Punkte) Für die euklidische Norm in $\mathbb{R}^n$ schreiben wir $r := \|x\|$. Bestimmen Sie mit Beweis die totale Ableitung von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto r^\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Aufgabe: (2+2=4 Punkte)

- (a) Berechnen Sie die Cartan-Ableitung $d\omega$ der Differentialform

$$\omega \in A^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}), \quad \omega(x_1, x_2) = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

- (b) Berechnen Sie $\varphi^* \omega$ entlang $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$.

5. Aufgabe: (3 Punkte) Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma \omega$ von

$$\omega \in A^1(\mathbb{R}^n), \quad \omega(x) = \sum_{i=1}^n x_i dx_i$$

entlang des Weges $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto (t^1, t^2, \dots, t^n)$.

Die Übungsblätter sind erhältlich unter

<http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner/MathPhys2SoSe14/>