

Blatt 9 Aufgabe 1 a)

Die totale Ableitung von $m(a,b)=a*b$ in (a_0, b_0) ist $Dm(a_0, b_0) = (b_0 \ a_0)$ Wir beweisen dies, indem wir zeigen:

$$m(a, b) - m(a_0, b_0) - (b_0, a_0) * (a - a_0, b - b_0)^T = o(a - a_0, b - b_0)$$

Betrachte zuerst die linke Seite der Gleichung

$$\begin{aligned} m(a, b) - m(a_0, b_0) - (b_0, a_0) * (a - a_0, b - b_0)^T \\ &= ab - a_0b_0 - ab_0 + a_0b_0 - a_0b + a_0b_0 \\ &= ab - ab_0 - a_0b + a_0b_0 \\ &= a(b - b_0) - a_0(b - b_0) \\ &= (a - a_0)(b - b_0) \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt $(a - a_0)(b - b_0) = o(a - a_0, b - b_0)$

Dazu zeigen wir, dass ein $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $H(a_0, b_0) = 0$, H stetig in (a_0, b_0) und $(a - a_0)(b - b_0) = \|(a, b) - (a_0, b_0)\| * H(a, b)$

$$\Rightarrow H(a, b) = \begin{cases} \frac{(a-a_0)(b-b_0)}{\sqrt{(a-a_0)^2 + (b-b_0)^2}} & (a, b) \neq (a_0, b_0) \\ 0 & (a, b) = (a_0, b_0) \end{cases}$$

Jetzt zeigen wir, dass $\lim_{(a,b) \rightarrow (a_0, b_0)} H(a, b) = 0$ das gilt genau dann wenn $\lim_{(a,b) \rightarrow (a_0, b_0)} |H(a, b)| = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{(a,b) \rightarrow (a_0, b_0)} |H(a, b)| &= \lim_{(a,b) \rightarrow (a_0, b_0)} \left| \frac{(a - a_0)(b - b_0)}{\sqrt{(a - a_0)^2 + (b - b_0)^2}} \right| \\ &\leq \lim_{(a,b) \rightarrow (a_0, b_0)} \frac{|(a - a_0)(b - b_0)|}{\sqrt{(a - a_0)^2}} = \\ &\quad \lim_{(a,b) \rightarrow (a_0, b_0)} |b - b_0| = 0 \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung.