Homotopie von Kurven

Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere offene Teilmenge. Zwei Kurven $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ mit gemeinsamem Anfangspunkt A und gemeinsamem Endpunkt B heißen *homotop* in X, wenn es eine stetige Abbildung

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X \quad (t,s) \mapsto H(t,s)$$

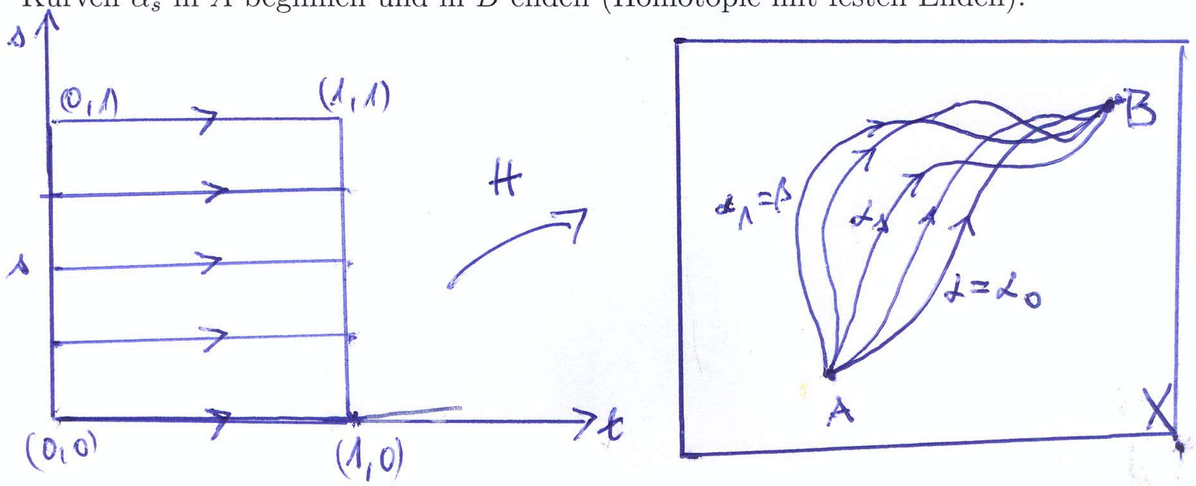
mit folgenden Eigenschaften gibt:

1.
$$\left.\begin{array}{rcl} H(t,0) &=& \alpha(t) \\ H(t,1) &=& \beta(t) \end{array}\right\} \text{für alle } t \in [0,1]$$

2.
$$\left.\begin{array}{rcl} H(0,s) &=& A \\ H(1,s) &=& B \end{array}\right\} \text{für alle } s \in [0,1]$$

Für jedes $s \in [0,1]$ definiert $\alpha_s(t) := H(t,s)$ eine stetige Kurve in X, die von A nach B läuft, dabei ist $\alpha_0 = \alpha$ und $\alpha_1 = \beta$.

Man sagt: Die Homotopie H liefert eine stetige Deformation von α in β, wobei alle Kurven α_s in A beginnen und in B enden (Homotopie mit festen Enden).



Beispiel: In einem konvexen Gebiet $X \subset \mathbb{R}^n$ sind je zwei Kurven α und β mit dem gleichen Anfangs- und Endpunkt homotop.

Beweis: Man betrachte die Homotopie

$$\begin{aligned} H(t,s) &= s\beta(t) + (1-s)\alpha(t) \\ &= \alpha(t) + s(\beta(t) - \alpha(t)) \end{aligned}$$

Spezialfall: Ist U ein Sterngebiet mit Sternmittelpunkt $p_* \in U$ und $\alpha : [0,1] \to U$ geschlossene Kurve mit $\alpha(0) = \alpha(1) = p_*$.

Dann ist

$$H(t,s) = sp_* + (1-s)\,\alpha(t)$$

eine Homotopie zwischen α und der Punktkurve β mit $\beta(t) = p_*$ für alle $t \in [0,1]$.

Theorem. (Homotopieinvarianz des Kurvenintegrals für geschlossene 1-Formen)

Seien α und β Integrationswege in einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit gemeinsamem Anfangspunkt A und gemeinsamen Endpunkt B, die in U zueinander homotop sind. Dann gilt für jede stetig differenzierbare geschlossene 1-Form ω in U.

$$\boxed{\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega}$$

Def:(nullhomotop): Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\alpha : [0,1] \to U$ eine geschlossene Kurve mit

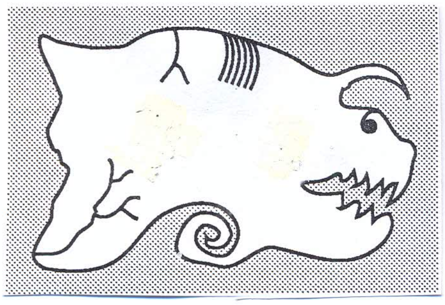
$$\alpha(0) = \alpha(1) = p_0 \in U.$$

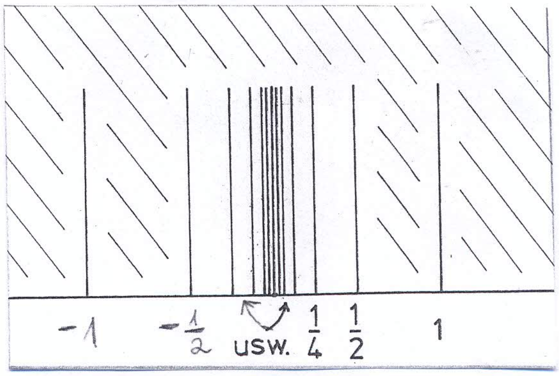
Ferner sei $\beta(t) := p_0$ für alle $t \in [0,1]$. β heißt Punktkurve. α heißt *nullhomotop* in U, falls α zur Punktkurve β homotop ist.

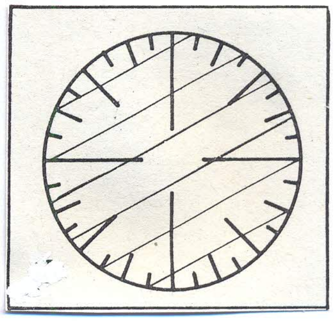
Definition (einfach zusammenhängend)

Ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jede geschlossene Kurve α in U nullhomotop ist.

Beachte: Das 'Porträt' eines einfach zusammenhängenden Gebietes (schon der Ebene $\mathbb{R}^2$) kann sehr kompliziert aussehen:







Theorem: Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und ω eine stetig differenzierbare geschlossene 1-Form auf U. Dann gilt für jede geschlossene Integrationskurve α in U

$$\int_\alpha \omega = 0$$

Folgerung 1: In einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist jede geschlossene stetig differenzierbare 1-Form exakt (das ist eine Verallgemeinerung des Poincaré'schen Lemmas).

Folgerung 2: Ist $U \subset \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend, dann ist jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $v : U \to \mathbb{R}^3$ mit $rot\ v = 0$ ein Gradientenfeld.

Die Integrabilitätsbedingungen für das Vektorfeld $v = (v_1, v_2, v_3)^\top$ lauten gerade $\partial_2 v_3 = \partial_3 v_2$, $\partial_3 v_1 = \partial_1 v_3$, $\partial_1 v_3$, $\partial_1 v_2 = \partial_2 v_1$. Diese Bedingungen sind aber mit $rot v = 0$ äquivalent.

Bemerkungen:

1. Auf den einfachen Zusammenhang kann in Folgerung 2 nicht verzichtet werden: Ist $U = \mathbb{R}^3 \backslash \mathbb{R} e_3$ ($e_3 = (0,0,1)^\top$), und $H(x,y,z) = (\frac{-y}{x^2 y^2}, \frac{x}{x^2 y^2}, 0)^\top$, dann erfüllt H die Integrabilitätsbedingungen, H ist aber kein Gradientenfeld. (Begründung?)

2. $\mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ ist nicht einfach zusammenhängend (Beweis?), jedoch ist $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ für $n \geq 3$ einfach zusammenhängend, speziell ist $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ einfach zusammenhängend.

   Versuchen Sie einen Beweis, indem Sie zeigen

   (a) Jede Kurve in einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ mit Anfangspunkt A und Endpunkt B ist zu einen Streckenzug von A nach B homotop (wobei man die Strecken sogar parallel zu den Koordinatenachsen wählen kann).

   (b) Verwenden Sie (a) um zu zeigen, dass jeder Streckenzug in $\mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ in einem Sterngebiet der speziellen Gestalt $\mathbb{R}^n \backslash \mathbb{R}_{\geq} a$ liegt, wobei $a \neq 0$ ein geeigneter Vektor in $\mathbb{R}^n$ ist.