

Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker III – WS 2012/13 Blatt 7
Dr. Rolf Busam/Mirko Rösner

Abgabe bis Freitag, den 7.12.2012, um 11:15 Uhr in den Übungskästen in INF 288.
Website: <http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner/HM3>

1. Sei X eine beliebige nichtleere Menge und sei L ein Untervektorraum des Raumes $\text{Abb}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ aller Funktionen auf X .

Zeigen Sie, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind:

- i) Für alle $f, g \in L$ liegt auch $f \sqcup g := \max(f, g)$ wieder in L .
- ii) Für alle $f, g \in L$ liegt auch $f \sqcap g := \min(f, g)$ wieder in L .
- iii) Für alle $f \in L$ liegt auch $f^+ = \max(f, 0)$ wieder in L .
- iv) Für alle $f \in L$ liegt auch $f^- = \min(f, 0)$ wieder in L .
- v) Für alle $f \in L$ liegt auch $|f|$ wieder in L .

Ist eine der fünf äquivalenten Bedingungen erfüllt, dann nennt man L einen *Verband*. (5P)

Zusatzaufgabe: Begründen Sie, warum der Vektorraum $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig differenzierbar}\}$ kein Verband ist. (+2P extra)

2. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere kompakte Teilmenge und sei $f : K \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige nichtnegative Funktion. Die Fortsetzung $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei gegeben durch

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \in K, \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus K. \end{cases}$$

Zeigen Sie: $\tilde{f} \in \mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$.¹ (4P)

Daher ist die Definition $\int_K f(x) d^n x := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) d^n x$ sinnvoll.

3. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $f : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige Funktion und sei $K := \{(x, y) \in A \times \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Zeigen Sie: Die Menge $K \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist kompakt und $\text{vol}_{n+1}(K) = \int_A f(x) d^n x$.

Bemerkung: Das Volumen ist definiert als $\text{vol}_{n+1}(K) := \int_K 1 d^{n+1} x$. (3P)

4. Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine stetige Funktion und sei $K = \{(x, y, z) \in [a, b] \times \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 \leq (f(x))^2\}$.

Zeigen Sie: $\text{vol}_3(K) = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$. (4P)

Tipp: Zylinderkoordinaten.

¹Der Raum $\mathcal{H}^\downarrow(\mathbb{R}^n)$ heißt im Skript B^- , das Integral auf diesem Raum heißt im Skript I^- .