

Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker III – WS 2012/13 Blatt 6
Dr. Rolf Busam/Mirko Rösner

Abgabe bis Freitag, den 30.11.2012, um 11:15 Uhr in den Übungskästen in INF 288.
Website: <http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner/HM3>

1. Sei die Abbildung p definiert durch

$$p : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \\ (r, \phi) \longmapsto (r \cos(\phi), r \sin(\phi)) =: (x, y),$$

also der Koordinatenwechsel von Polar- zu kartesischen Koordinaten. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine offene Teilmenge und sei $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Sei $\Omega := \{(r, \phi) \in \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \mid p(r, \phi) \in U\}$. Sei außerdem $\tilde{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $\tilde{u} := u \circ p$.

- a) Zeigen Sie

$$(\Delta u)(x, y) = \left(\tilde{u}_{rr} + \frac{1}{r} \tilde{u}_r + \frac{1}{r^2} \tilde{u}_{\phi\phi} \right) (r, \phi).$$

Bemerkung: Dabei ist $\Delta = (\partial_x)^2 + (\partial_y)^2$ der Laplace-Operator in kartesischen Koordinaten. (4P)

- b) Bestimmen Sie alle harmonischen Funktionen in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, die nur von r abhängen, also rotationssymmetrisch sind. (2P)

2. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine holomorphe Funktion ohne Nullstellen.

- a) Berechnen Sie das Integral $\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z(z^2+1)(z+5)} dz$ für $\gamma(t) = 3 \exp(it)$ für $0 \leq t \leq 2\pi$, indem Sie den Residuensatz verwenden. (3P)

- b) Zeigen Sie $\int_{\gamma} \frac{1}{z^n} dz = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_{>1}$ und jeden geschlossenen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Bemerkung: Da diese Aussage im Beweis des Residuensatzes verwendet wird, sollten Sie ein Argument finden, das den Residuensatz nicht benötigt. (2P)

3. Bestimmen Sie die Taylorentwicklung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ des Hauptzweiges Log des komplexen Logarithmus im Entwicklungspunkt $z_0 = -1 + i$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius R . Welche Funktion wird durch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ im Konvergenzkreis dargestellt, wenn $\text{Im}(z) < 0$ und $|z - z_0| < R$? (4P)

4. Sei $Q := [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ ein Quadrat und sei $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2} & \text{falls } x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie das Integral $\int_Q f(x_1, x_2) d^2x := \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x_1, x_2) dx_2 dx_1$. Geben Sie eine geometrische Interpretation dafür an. (5P)