

Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker III – WS 2012/13 Blatt 3
Dr. Rolf Busam/Mirko Rösner

Abgabe bis Freitag, den 09.11.2012, um 11:15 Uhr in den Übungskästen in INF 288.
Website: <http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner/HM3>

1. Wir identifizieren $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass eine $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ genau dann $\mathbb{C}$ -linear ist, wenn $L(ih) = iL(h)$ für alle $h \in \mathbb{R}$ gilt. (2P)

Wie sieht in diesem Fall die 2×2 -Matrix aus, die L als $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung bezüglich der Standardbasis $(1, i)$ beschreibt? (1P)

2. In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen komplex differenzierbar? Berechnen Sie jeweils die komplexe Ableitung in diesen Punkten.

(a) $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) := 2xy + i(x^2 + y^2)$, wobei $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$, (1P)

(b) $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $g(z) := \sin(\bar{z})$, (1P)

(c) $h : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h(z) := z\bar{z} + \frac{z}{\bar{z}}$. (1P)

(d) Gibt es ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$, in dem f holomorph ist? (1P)

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_\gamma \frac{1}{z} dz$ für eine Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch $\gamma(t) := c \cos(t) + i \sin(t)$ und $c \in \mathbb{R}_{>0}$, (2P)

(b) $\int_\gamma z \sin(z) dz$ für eine stückweise glatte Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(a) = 0$ und $\gamma(b) = i \ln(2)$. (2P)

4. (a) Sei $R > 0$ und $\beta_R(t) = R \exp(it)$ für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$. Zeigen Sie:

$$\left| \int_{\beta_R} \exp(iz^2) dz \right| \leq \frac{\pi(1 - \exp(-R^2))}{4R} < \frac{\pi}{4R}. \quad (3P)$$

(b) Zeigen Sie $\int_0^\infty \cos(t^2) dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \int_0^\infty \sin(t^2) dt$. (4P)

Tipp: Betrachten Sie die geschlossene Kurve $\gamma : [0, 3] \rightarrow \mathbb{C}$, definiert durch

$$\gamma(t) := \begin{cases} tR & 0 \leq t < 1, \\ R \exp(\frac{i\pi}{4}(t-1)) & 1 \leq t < 2, \\ (3-t)R \exp(\frac{i\pi}{4}) & 2 \leq t \leq 3. \end{cases}$$

Beachten Sie, dass $\int_\gamma \exp(iz^2) dz = 0$ (warum?) und die Abschätzung aus (a).