

Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker III – WS 2012/13 Blatt 11
Dr. Rolf Busam/Mirko Rösner

Abgabe bis Freitag, den 25.01.2013, um 11:15 Uhr in den Übungskästen in INF 288.
Die Punkte auf diesem Blatt sind alle Bonuspunkte!

Website: <http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner/HM3>

1. Für $\nu \in \mathbb{N}$ sei $f_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f_\nu := \chi_{[-\nu, \nu]}$.

Zeigen Sie, dass f_ν Lebesgue-integrierbar ist und dass die Folge $(f_\nu)_\nu$ punktweise monoton steigend gegen die konstante 1-Funktion f konvergiert. Folgern Sie, dass $f(x) \equiv 1$ nicht integrierbar ist. (+3P)

Folgerung: Beim Lebesgue'schen Grenzwertsatz ist also die Forderung wesentlich, dass es eine integrierbare Majorante gibt. Beim Satz von Beppo Levi ist die Forderung wesentlich, dass die Folge der Integrale $(I(f_\nu))_\nu$ beschränkt bleibt. Würde man diese Eigenschaften nicht fordern, so wäre die obige Folge jeweils ein Gegenbeispiel. Punktweise Konvergenz allein reicht also nicht aus.

2. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ definiert durch $f := \chi_{[-1, 1]}$. Berechnen Sie die Faltung

$$f * f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

(+2P)

3. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f := \chi_{[-1, 1]}$.

(a) Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. (+1P)

(b) Berechnen die Fouriertransformierte¹ $\hat{f}$ von f . (+2P)

(c) Zeigen Sie, dass $\hat{f} \notin \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. (+2P)

Hinweis: Sie können ein Resultat vom letzten Übungsblatt verwenden.

4. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \left(\frac{d}{dx}\right)^n \exp(-x^2)$ das n -te Hermitepolynom.

(a) Zeigen Sie, dass $H_n(x)$ ein Polynom vom Grad n ist. (+2P)

(b) Zeigen Sie die Rekursionsformel $\frac{d}{dx} H_n(x) = 2n H_{n-1}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$. (+2P)

(c) Man definiere die Funktion $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch $h_n(x) := H_n(x) \exp(-x^2/2)$. Zeigen Sie $h_n \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$ und die Orthogonalitätsrelation $\langle h_n, h_m \rangle_{L^2} = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}$. (+2P)

¹Bemerkung: Die Definition der Fouriertransformation für $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ -Funktionen können Sie in [Forster, O.: Analysis 3, §12] nachlesen.