

Übungen zu Höhere Mathematik für Physiker III – SS 2012 Blatt 1
Dr. Rolf Busam/Mirko Rösner

Abgabe bis Freitag, den 26.10.2012, um 13:30 Uhr in den Übungskästen in INF 288.
Website: <http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~mroesner/HM3>

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektorfelder Gradientenfelder sind und geben Sie gegebenenfalls ein Potential $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ an mit $-\text{grad } \phi = v$:

(a) $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} y \\ y-x \end{pmatrix}$ (2P)

(b) $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} y \\ x-y \end{pmatrix}$ (2P)

2. Sei durch $\omega(x, y, z) := (x^2 + xy)dx + (\frac{x^2}{2} + y + z)dy + ydz$ eine Differentialform $\omega \in A^1(\mathbb{R}^3)$ definiert. Berechnen Sie:

(a) $\int_{\gamma_1} \omega$ für $\gamma_1(t) := (2t, t, 5t)$ und $0 \leq t \leq 1$, (2P)

(b) $\int_{\gamma_2} \omega$ für $\gamma_2(t) := (2t, t^2, 5t)$ und $0 \leq t \leq 1$. (2P)

- (c) Bestimmen Sie die Cartanableitung $d\omega \in A^2(\mathbb{R}^3)$. Kürzen Sie bitte Ihr Ergebnis soweit wie möglich. (2P)

3. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer und sei $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein konservatives Kraftfeld mit einem Skalarpotential $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, sodass $-\text{grad}(\phi) = v$. Sei $\gamma : (a, b) \rightarrow U$ eine stetig differenzierbare Kurve, die die Bedingung $\gamma''(t) = v(\gamma(t))$ erfüllt.

- (a) Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{2} \langle \gamma'(t_2), \gamma'(t_2) \rangle - \frac{1}{2} \langle \gamma'(t_1), \gamma'(t_1) \rangle = \phi(\gamma(t_1)) - \phi(\gamma(t_2))$$

für beliebige $t_1, t_2 \in (a, b)$ gilt. (3P)

- (b) Was bedeutet dies physikalisch? (1P)

4. Sei $\mathbf{B} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein konstantes Magnetfeld, gegeben durch $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_3 \end{pmatrix}$, wobei $B_3 = 1 \mu\text{T}$ (ein Mikrotesla).

(a) Finden Sie ein Vektorpotential $\mathbf{A}_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\text{rot } \mathbf{A}_0 = \mathbf{B}$. (2P)

(b) Geben Sie alle Vektorpotentiale $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ an mit $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$. (2P)