

Sei $N > 1$ eine natürliche Zahl mit Primfaktorzerlegung $N = p_1 \cdot \dots \cdot p_r$.

1. Aufgabe: Sei $G = (\mathbb{Z}/(N), +)$ die additive Gruppe des Restklassenringes. Für einen Teiler d von N sei $\phi_d : G \rightarrow G$ definiert durch $\phi_d(x) = dx$.

Zeigen Sie:

- (a) ϕ_d ist ein Gruppenhomomorphismus ,
- (b) Es gibt einen Isomorphismus $\ker \phi_d \cong \text{Bild}(\phi_{N/d})$,
- (c) Es gibt einen Isomorphismus $\ker \phi_{N/d} \cong \text{Bild}(\phi_d)$.

2. Aufgabe: Wenn es keinen Primteiler p_i von N gibt mit $p_i \leq \sqrt{N}$, dann ist N prim.

3. Aufgabe: Seien $x \in \mathbb{Z}$ und sei $N > 2$ ungerade. Man definiert das Jacobisymbol als Produkt von Legendresymbolen

$$\left(\frac{x}{N}\right) = \prod_{i=1}^r \left(\frac{x}{p_i}\right) ,$$

wobei das Produkt die Primfaktoren von N durchläuft. Zeigen Sie für ganze Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$:

- (a) Wenn $x \equiv y \pmod{N}$, dann $\left(\frac{x}{N}\right) = \left(\frac{y}{N}\right)$.
- (b) $\left(\frac{x}{N}\right) = 0$ genau dann, wenn $\text{ggT}(x, N) \neq 1$.

4. Aufgabe: Bestimmen Sie für $x = 11$ und $p = 37$ das Legendresymbol $\left(\frac{x}{p}\right)$ mit jeder der folgenden drei Methoden:

- (a) Eulerkriterium: Prüfen Sie ob $x^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$.
- (b) Gaußkriterium: Berechnen Sie das Gaußsymbol $G(x, p)$.
- (c) Quadratisches Reziprozitätsgesetz.