

Sei G eine endliche kommutative Gruppe.

1. Aufgabe: Sei H eine Untergruppe von G . Zeigen Sie:

- (a) Wenn G zyklisch ist, dann ist G/H zyklisch.
- (b) Konstruieren Sie ein Beispiel, bei dem zwar H und G/H zyklisch sind, aber G nicht zyklisch ist.

2. Aufgabe: Sei $x = \prod_{g \in G} g$ das Produkt aller Elemente von G . Zeigen Sie $x^2 = 1$.

3. Aufgabe: Für eine natürliche Zahl $n \geq 1$ sei G_n die Einheitengruppe $G_n = (\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^\times$ mit der Multiplikation als Verknüpfung. Zeigen Sie: Für alle $n \geq 3$ ist G_n nicht zyklisch.

Hinweis: Es gibt einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $G_{n+1} \rightarrow G_n$. Verwenden Sie Aufgabe 1a) und vollständige Induktion.

4. Aufgabe: Wenn G die Ordnung pq hat für Primzahlen $p \neq q$, dann ist G zyklisch.