Übungen zur Elementaren Zahlentheorie **Sommersemester 2018**

Prof. Dr. Rainer Weissauer

Blatt 11

Abgabe bis 06. Juli

---

1. Aufgabe: Es gibt unendlich viele Primzahlen $p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ mit $p \equiv 2 \pmod 3$.

Hinweis: Erinnern Sie sich an Euklids Beweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, und passen Sie das Argument geeignet an.

2. Aufgabe: Eine natürliche Zahl $n \geq 1$ ist eine Primzahl genau dann wenn

$$(n-1)! \equiv -1 \pmod n \ .$$

Hinweis: Wenn n eine Primzahl ist, dann ist $\mathbb{Z}/(n)$ ein Körper.

3. Aufgabe: Sei $\sigma > 1$ eine reelle Zahl. Zeigen Sie:

(a) Die folgende Reihe konvergiert

$$\zeta_R(\sigma) = \sum_{(0,0) \neq (m,n) \in \mathbb{Z}^2} (m^2 + n^2)^{-\sigma} \ .$$

(b) Es gibt reelle Konstanten $c_1, c_2 > 0$ unabhängig von σ sodass

$$\zeta_R(\sigma) \leq c_1 + c_2 \int_1^\infty t^{-\sigma} \, \mathrm{d}\, t \ .$$

Hinweis: Schreiben Sie $\zeta_R(\sigma)$ als Summe der Teilreihe mit $mn = 0$ und der Teilreihe mit $mn \neq 0$. Verwenden Sie dann das Integralkriterium für Reihen.

4. Aufgabe: Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ quadratischer Zahlkörper für ein quadratfreies[1] $d \in \mathbb{N}_{>1}$.
Ein $\alpha \in K$ heißt *ganz* in K wenn es $r, s \in \mathbb{Z}$ gibt mit $\alpha^2 + r\alpha + s = 0$.
Zeigen Sie: Wenn $d \equiv 1 \pmod 4$, dann ist $\alpha = a + b\frac{1+\sqrt{d}}{2}$ ganz für alle $a, b \in \mathbb{Z}$.

---

[1]Quadratfrei bedeutet, d enthält jeden Primteiler nur einmal.