Übungen zur Elementaren Zahlentheorie **Sommersemester 2018**

Prof. Dr. Rainer Weissauer Blatt 9

Abgabe bis 22. Juni

Sei $R = \mathbb{Z}[i]$ der Ring der Gaußschen Zahlen.

1. Aufgabe: Sei $p \in \mathbb{N}_{>0}$ sowohl prim in $\mathbb{Z}$ als auch in R. Zeigen Sie:

(a) $R/(p)$ ist ein endlicher Körper mit p^2 Elementen.

(b) Dieser Körper enthält eine primitive vierte Einheitswurzel.

2. Aufgabe: Sei $p \in \mathbb{N}_{>0}$ prim in $\mathbb{Z}$, aber nicht prim in R. Zeigen Sie:

(a) p hat in R genau zwei Primteiler. Ist einer dieser Primteiler $a + bi \in R$, dann ist der andere $a - bi \in R$.

(b) Diese Primteiler erfüllen $\mathrm{ggT}(a + bi, a - bi) = 1$ in R genau dann, wenn $p \neq 2$.

3. Aufgabe: Seien $m \in \mathbb{N}_{>0}$ und $n \in \mathbb{N}_{>0}$ jeweils Summe zweier Quadratzahlen. Das bedeutet, es gibt $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $m = a^2 + b^2$ und $n = c^2 + d^2$.
Zeigen Sie: Das Produkt mn ist auch Summe zweier Quadratzahlen.

4. Aufgabe: Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) n ist Summe zweier Quadratzahlen in $\mathbb{Z}$,

(b) Jeder Primteiler von n ist entweder Summe zweier Quadratzahlen oder kommt in n mit gerader Vielfachheit vor.