

Sei $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit q Elementen und sei $K/\mathbb{F}$ eine Körpererweiterung vom Grad $d = \dim_{\mathbb{F}} K$, wobei d eine Primzahl ist. Sei $F_{\mathbb{F}} : K \rightarrow K$, $x \mapsto x^q$ der relative Frobeniusautomorphismus mit $\{x \in K \mid F_{\mathbb{F}}(x) = x\} = \mathbb{F}$. Sei $\alpha \in K$ mit $\alpha \notin \mathbb{F}$ beliebig.

1. Aufgabe: Die Elemente $F_{\mathbb{F}}^i(\alpha)$ für $i = 1, \dots, d$ sind paarweise verschieden.

2. Aufgabe: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Polynom

$$P_{\alpha}(X) = \prod_{i=1}^d (X - F_{\mathbb{F}}^i(\alpha))$$

in $\mathbb{F}[X]$ liegt. Zeigen Sie: P_{α} ist irreduzibel in $\mathbb{F}[X]$.

Hinweis: Wenn $P_{\alpha}(X)$ nicht irreduzibel ist, dann

- (a) hat P_{α} einen echten Teiler $u \in \mathbb{F}[X]$ mit $u(\alpha) = 0$,
- (b) gilt $u(F_{\mathbb{F}}^i(\alpha)) = 0$ für $i = 1, \dots, d$,
- (c) folgt $\text{grad}(u) = d$ wegen Aufgabe 1.

3. Aufgabe: Sei $P_{\alpha} \in \mathbb{F}[X]$ das irreduzible Polynom aus der vorigen Aufgabe.

Zeigen Sie: Der Einsetzungshomomorphismus ist ein Isomorphismus:

$$\mathbb{F}[X]/(P_{\alpha}) \rightarrow K, \quad f + (P_{\alpha}) \mapsto f(\alpha).$$

4. Aufgabe: Bestimmen Sie die Nullstellen des Polynoms $X^q - \alpha$ in K mit Vielfachheit.