Übungen zur Elementaren Zahlentheorie **Sommersemester 2018**

Prof. Dr. Rainer Weissauer Blatt 2

Abgabe bis 4. Mai in der Übungsgruppe

---

1. Aufgabe: Sei R ein nullteilerfreier Ring und sei $p \in R \setminus \{0\}$ keine Einheit. Zeigen Sie: p ist ein Primelement genau dann, wenn der Ring $R/(p)$ nullteilerfrei ist.

2. Aufgabe: Ist $(M, +)$ eine abelsche Gruppe, dann erhält man einen $\mathbb{Z}$-Modul $(M, +, \cdot)$ vermöge $n \cdot m := \sum_{i=1}^{n} m$ für $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ und $m \in M$ und $n \cdot m = -|n| \cdot m$ für $n \in \mathbb{Z}_{<0}$.

3. Aufgabe: Für $d \in \mathbb{Z}$ ist $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] := \{x = a + b \cdot \sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ein nullteilerfreier Ring. Bestimmen Sie die Einheiten dieses Rings für alle $d < 0$.

4. Aufgabe: Die komplexen Zahlen $2, 3, 1 \pm \sqrt{-5}$ sind irreduzible Elemente des Rings $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.