Innere Kugel

Betrachtet man den $\mathbb{R}^n$ und wählt die Gitterpackung zur Standardbasis $B = \{ e_1, \dots e_n \}$, so hat die Fundamentalmasche gerade ein Hypervolumen von 1. Man kann sich nun ab Dimension zwei die Frage stellen, welchen Radius r_n die größte Kugel um den Punkt $\left(\frac{1}{2} \mid \dots \mid \frac{1}{2}\right)$ haben kann, ohne die Eckkugeln der Masche mit Radius $\frac{1}{2}$ zu durchdringen.

Für Dimension 2 beispielsweise ist das gerade $r_2 = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| - 1}{2} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} < \frac{1}{2}$, damit passt also keine weitere Kreisscheibe von Radius $\frac{1}{2}$ in den Zwischenraum.

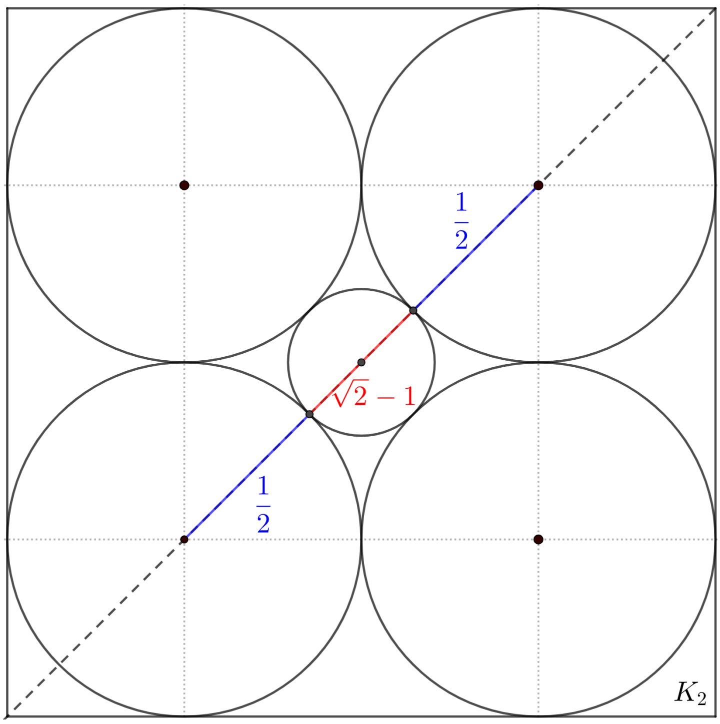


Abbildung 1: Größte Zwischenraumkugel zur Standardbasispackung des $\mathbb{R}^2$

Allgemein gilt für höhere Dimensionen analog, dass dieser Maximale Radius gerade

$$r_n = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\| - 1}{2} = \frac{\sqrt{n} - 1}{2}$$

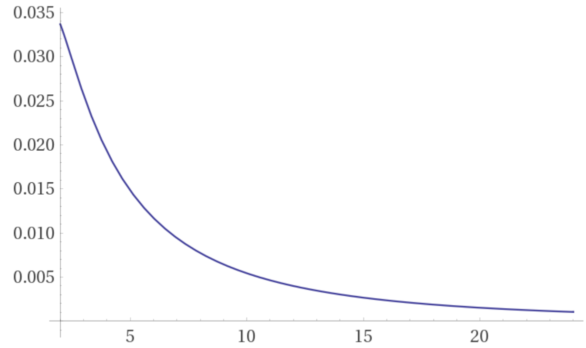
beträgt. Für $n = 4$ ist dies gerade $r_4 = 1/2$ und eine weitere Kugel passt jeweils in die Zwischenräume dieser Packung. Für $n = 9$ ist dann der Radius gerade $r_9 = 1$ und die innere Kugel berührt einen Hyperkubus K_n mit Kantenlänge 2, den man durch Strecken der Fundamentalmasche um den Mittelpunkt der inneren Kugel mit Faktor 2 erhält. K_n hat die Eigenschaft, dass in ihm alle Kugeln der Grundmasche enthalten sind und für

$n = 10$ wird dieser sogar entsprechend von der inneren Kugel durchdrungen.
Dabei ist für $n \leq 1205$ das Volumen von K_n größer als das der inneren Kugel. Es dreht sich ab $n \geq 1206$ die Ungleichung und die innere Kugel ist selbst vom Volumen größer als K_n. Dabei ist kontraintuitiv, dass diese innere Kugel durch die äußere Kugeln begrenzt wird die alle innerhalb von K_n liegen.

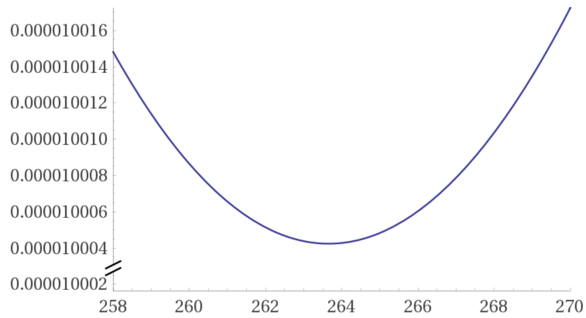
n	r_n	$\lambda_n\left(B_{r_n}\right)$	$\lambda_n\left(K_n\right)$
2	0.2071	0.1348	4
3	0.3660	0.2054	8
4	0.5	0.3084	16
9	1	3.2985	512
10	1.0811	5.5639	1024
1205	7.5777	$5.4752 \cdot 10^{362}$	$5.5099 \cdot 10^{362}$
1206	7.5932	$1.1147 \cdot 10^{363}$	$1.1020 \cdot 10^{363}$

Tabelle 1: Gerundete Werteübersicht

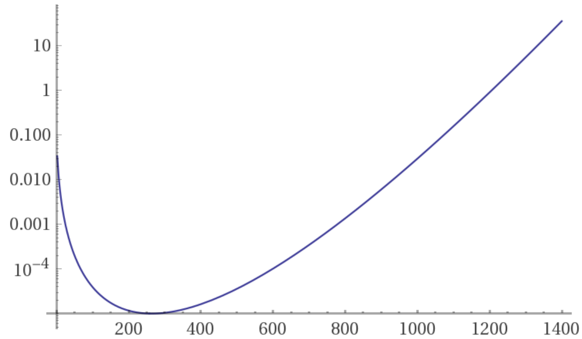
Das Verhältnis $\frac{\lambda_n(B_{r_n})}{\lambda_n(K_n)}$ nimmt dabei wie intuitiv zu erwarten zunächst bis $n = 264$ ab und nimmt danach wieder zu.



(a) $[2, 24]$



(b) $[258, 270]$



(c) $[2, 1400]$

Abbildung 2: (Grafiken erstellt mit Wolfram|Alpha) Kontinuierliche Fortsetzung von $\frac{\lambda_n(B_{r_n})}{\lambda_n(K_n)}$ mithilfe der Gammafunktion Γ für Definitionsbereich …