Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2022

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 15. Juli 2022

Lineare Algebra II

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. (4 Punkte). Bestimmen Sie die allgemeine Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$$

sowie, falls existent, die Jordan'sche Normalform. Geben Sie zudem das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom von A an.

Aufgabe 2. (2 Punkte). Sei $A \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ mit $A \neq E$ und $A^3 = E$. Bestimmen Sie die allgemeine Normalform von A. Geben Sie zudem die Jordan'sche Normalform von A über $\mathbb{C}$ an.

Aufgabe 3. (4 Punkte). Bestimmen Sie bis auf Ähnlichkeit alle Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$, deren charakteristisches Polynom gleich $(T^4 - 1) \cdot (T^2 - 1)$ ist. Geben Sie für jede Ähnlichkeitsklasse das zugehörige Minimalpolynom an.
Hinweis: Geben Sie eine Liste paarweise nicht ähnlicher Matrizen an, so dass jede Matrix mit charakteristischem Polynom $(T^4 - 1) \cdot (T^2 - 1)$ zu einer dieser ähnlich ist. Begründen Sie, warum dies der Fall ist.

Aufgabe 4. $(2 + 2$ Punkte$)$.

a) Finden Sie ein Beispiel für zwei Matrizen A, B mit Einträgen aus $\mathbb{Q}$, die das gleiche Minimalpolynom und das gleiche charakteristische Polynom haben, aber nicht ähnlich sind.
Hinweis: Eventuell ist es hilfreich, zwei nicht-isomorphe e.e. $\mathbb{Q}[T]$-Torsionsmoduln der Form $\mathbb{Q}[T]/(\alpha_1) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}[T]/(\alpha_s)$ mit $\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \ldots \mid \alpha_s$ bzw. $\mathbb{Q}[T]/(\beta_1) \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}[T]/(\beta_r)$ mit $\beta_1 \mid \beta_2 \mid \ldots \mid \beta r$ zu finden, so dass $\alpha_s = \beta_r$ und $\prod_{i=1}^{s} \alpha_i = \prod_{j=1}^{r} \beta_j$.

b) Sei K ein Körper. Gegeben seien paarweise verschiedene normierte Primpolynome $p_1, \ldots, p_n \in K[T]$, sowie natürliche Zahlen $1 \leq r_i \leq s_i, i = 1, \ldots, n$. Sei $\mu := p_1^{r_1} \cdots p_n^{r_n}$ und $\chi := p_1^{s_1} \cdots p_n^{s_n}$. Zeigen Sie: Es existiert eine Matrix A mit Einträgen aus K, deren Minimalpolynom gleich μ ist und deren charakteristisches Polynom gleich χ ist.

Aufgabe 5. (2 Punkte). Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie: A ist ähnlich zu seiner Transponierten A^t.
Hinweis: Prüfen Sie die Matrizen $T \cdot E - A$ und $T \cdot E - A^t$ auf Äquivalenz in $K[T]^{n\times n}$, z.B. indem Sie zeigen, dass sich $T \cdot E - A^t$ auf die gleiche Elementarteiler-Diagonalform wie $T \cdot E - A$ bringen lässt.

Dies ist das letzte Übungsblatt. Abgabe bis Freitag, 22. Juli 2022, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf