Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2022

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 08. Juli 2022

Lineare Algebra II

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. (2 + 2 Punkte). Sei R ein Hauptidealring und $f\colon L \to M$ ein Homomorphimsus zwischen endlich erzeugten freien R-Moduln. *Zeigen Sie*:

a) Es existiert ein freier Untermodul $F \subseteq L$ mit $L = \ker f \oplus F$.

b) Es existieren Basen $x_1, \ldots, x_m$ von L und $y_1, \ldots, y_n$ von M sowie Elemente $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in R \backslash \{0\}, r \leq \min\{m, n\}$, so dass $f(x_i) = \alpha_i y_i$ für $i = 1, \ldots, r$ und $f(x_i) = 0$ für $i > r$. Zusätzlich kann man $\alpha_i \mid \alpha_{i+1}$ für $1 \leq i < r$ erreichen.

Aufgabe 2. (2 + 2 Punkte).

a) Sei M ein endlich erzeugter freier $\mathbb{Z}$-Modul und sei $L \subseteq M$ ein Untermodul. Sei $e_1, \ldots, e_d$ ein Basis von M und $f_1, \ldots, f_d$ ein Erzeugendensystem von L. Insbesondere gibt es $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, so dass $f_i = \sum_{j=1}^d a_{ij} e_j$ für alle $i = 1, \ldots, d$. Wir betrachten die Matrix $A := (a_{ij})$.
Zeigen Sie: Ist $\det(A) \neq 0$, so ist $f_1, \ldots, f_d$ eine Basis von L und der Restklassenmodul M/L ist endlich und für seine Kardinalität $|M/L|$ gilt $|M/L| = |\det(A)|$.
Hinweis: Folgende Tatsache könnte nützlich sein: Für jede Matrix $B \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Z})$ gilt $\det(B) = \pm 1$ (warum?).

b) Sei $(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. *Zeigen Sie*: Für das Ideal $\mathfrak{a} := (a + b \cdot i\sqrt{2})$ im Ring $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ gilt $|\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]/\mathfrak{a}| = a^2 + 2b^2$.

Aufgabe 3. (4 Punkte). Bestimmen Sie alle abelschen Gruppen mit 1400 Elementen (bis auf Isomorphie).
Hinweis: Geben Sie eine Liste abelscher paarweise nicht isomorpher Gruppen an, so dass jede abelsche Gruppe mit 1400 Elementen zu einer dieser isomorph ist. Begründen Sie, warum dies der Fall ist.

Aufgabe 4. (2 + 2 Punkte). Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f\colon V \to V$ ein K-Endomorphismus.

a) Sei V f-zyklisch. *Zeigen Sie*, dass dann jeder f-invariante Unterraum $U \subseteq V$ ebenfalls f-zyklisch ist.

b) Sei $K = \mathbb{Q}$ und $V = \mathbb{Q}^3$. *Finden Sie* ein Beispiel für einen K-Endomorphismus f von V, so dass V f-zyklisch ist.

Abgabe bis Freitag, 15. Juli 2022, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf