Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2022

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 01. Juli 2022

Lineare Algebra II

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. (4 Punkte). Wir betrachten den $\mathbb{Z}$-Modul $M = \mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$. *Bestimmen Sie* alle Ketten

$$0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq M_2 \subsetneq \ldots \subsetneq M_l = M$$

wobei $l = l_{\mathbb{Z}}(M)$ die Länge des $\mathbb{Z}$-Moduls M ist. *Berechnen Sie* für jede Kette die Restklassenmoduln M_{i+1}/M_i für $0 \leq i \leq l-1$. Was fällt Ihnen auf?
Hinweis: Zeigen Sie als Zwischenschritt zunächst folgende Aussage: Sind $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n \mid m$, so gibt es einen kanonischen Isomorphismus von $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}/\frac{m}{n}\mathbb{Z} \cong n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2. $(1+1+1+1$ Punkte). Wir betrachten den Ring $S := C([0,1], \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen $[0,1] \to \mathbb{R}$ und das Ideal $\mathfrak{b} := \{g \in S \mid g(\frac{1}{2}) = 0\}$. Wir zeigen, dass der S-Untermodul $\mathfrak{b} \subseteq S$ nicht endlich erzeugt ist (obwohl S endlich erzeugt ist als S-Modul). Dazu nehmen wir an, es gäbe ein Erzeugendensystem $f_1, \ldots, f_n \in \mathfrak{b}$ von $\mathfrak{b}$.

a) *Zeigen Sie*: Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass kein f_i die Nullabbildung ist und dass $|f_i(x)| \leq 1$ für alle $x \in [0,1]$ und alle $i = 1, \ldots, n$ gilt.[1]

b) Wir setzen $f(x) := \sum_{i=1}^n \sqrt{|f_i(x)|}$. *Zeigen Sie*: $f \in \mathfrak{b}$.
Nach Annahme existieren also $g_1, \ldots, g_n \in S$, so dass $f = \sum_{i=1}^n g_i \cdot f_i$. Wir setzen $C := \max_{i=1}^n \max_{x\in[0,1]} |g_i(x)|$. Warum ist C wohldefiniert und ungleich Null?
Wegen der Dreiecksungleichung gilt

$$|f(x)| \leq C \sum_{i=1}^n |f_i(x)| \text{ für alle } x \in [0,1]. \tag{$*$}$$

c) *Zeigen Sie*: Es existiert ein offenes Intervall $U \subseteq [0,1]$ mit $\frac{1}{2} \in U$ und $\sqrt{|f_i(u)|} \leq \frac{1}{2C}$ für alle $u \in U, i = 1, \ldots, n$. Setzen Sie dann dies in $(*)$ ein, um $|f(u)| \leq \frac{1}{2}|f(u)|$ für alle $u \in U$ zu erhalten.

d) *Zeigen Sie*: Es ist $f(u_0) \neq 0$ für ein $u_0 \in U$. Führen Sie dies zum Widerspruch mit c).

Aufgabe 3. $(1+1+2$ Punkte). Sei $R \neq 0$ ein kommutativer Ring und $0 \neq \mathfrak{a} \subseteq R$ ein Ideal.

a) *Zeigen Sie*: $\mathfrak{a}$ ist frei als R-Modul $\iff \mathfrak{a} = (a)$ für einen Nicht-Nullteiler $a \in R$.

b) *Finden Sie* ein Beispiel für R, einen endlich erzeugten freien R-Modul F und einen Untermodul $N \subseteq F$, welcher weder frei noch endlich erzeugt ist.

c) Sei R so, dass jedes Ideal in R (aufgefasst als R-Modul) endlich erzeugt ist. Sei F ein endlich erzeugter freier R-Modul und $N \subseteq F$ ein Untermodul. *Zeigen Sie*, dass N endlich erzeugt ist. *Hinweis*: In der Vorlesung wurde die entsprechende Aussage für Hauptidealringe bewiesen.

Aufgabe 4. (1.5+1+1.5 Punkte). Berechnen Sie die Elementarteiler folgender Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 12 \\ 11 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 3}, \quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 14 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}, \quad \begin{pmatrix} 1+X & 5+3X-2X^2 \\ -2-2X & -9-6X+3X^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}[X]^{2\times 2}.$$

[1] Diese zweite Annahme hat sich als überflüssig erwiesen (sie wird später im Beweis nicht benutzt)

Abgabe bis Freitag, 08. Juli 2022, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf