Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2022

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 17. Juni 2022

Lineare Algebra II

Übungsblatt 8

Aufgrund des Feiertags diese Woche gibt es auf diesem Übungsblatt nur 3 Aufgaben.

Aufgabe 1. $(1+1+1+1$ Punkte). Wir betrachten den Unterring

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] := \{a + b \cdot i\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

von $\mathbb{C}$ sowie die multiplikative Abbildung $\delta\colon \mathbb{Z}[i\sqrt{2}] \to \mathbb{N}_0, a + b \cdot i\sqrt{2} \mapsto |a + b \cdot i\sqrt{2}|^2 = a^2 + 2b^2$.

a) *Zeigen Sie*: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ existiert ein $x \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ mit $|z - x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
Hinweis: Eventuell ist es hilfreich, sich $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ als Gitter in der Ebene $\mathbb{C}$ vorzustellen und geometrisch zu argumentieren.

b) *Zeigen Sie*: Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ mit $\beta \neq 0$ gibt es $q \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ mit $\delta(\alpha - q \cdot \beta) \leq \frac{3}{4}\delta(\beta)$.
Folgern Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ euklidisch ist.

c) *Zeigen Sie*: Der Restklassenring $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]/\mathfrak{a}$ ist endlich für jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq 0$ in $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
Hinweis: Vielleicht ist es inspirierend, sich daran zu erinnern, wie man für den Hauptidealring $\mathbb{Z}$ mit Hilfe von Division mit Rest zeigt, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für jedes $n \neq 0$ ein endliches Repräsentantensystem hat.

d) Zerlegen sie das Element 3 in Primfaktoren in $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$.
Hinweis: Möchte man beweisen, dass ein $x \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ ein Primelement ist, so reicht es zu zeigen, dass $\delta(x)$ ein Primelement in $\mathbb{Z}$ ist (warum?).

Aufgabe 2. $(1+2+1$ Punkte). Sei R ein faktorieller Ring und $a, b \in R \setminus \{0\}$. Sei $v = \mathrm{kgV}(a, b)$. *Zeigen Sie*:

a) v ist bis auf Assoziiertheit charakterisiert durch folgende Eigenschaft:
$a \mid v,\ b \mid v$ und für jedes $e \in R$ mit $a \mid e,\ b \mid e$ gilt $v \mid e$.

b) Es gilt $Ra \cap Rb = Rv$.

c) v ist assoziiert zu $\frac{a \cdot b}{\mathrm{ggT}(a,b)}$.

Aufgabe 3. $(1+1.5+1.5$ Punkte). Wir betrachten den Restklassenring

$$E := \mathbb{F}_2[X]/(X^2 + X + 1)$$

und schreiben $\overline{a}$ für die Restklasse von $a \in \mathbb{F}_2[X]$ in E.

a) *Zeigen Sie*, dass E aus 4 Elementen besteht: $\overline{0}, \overline{1}, \overline{X}$ und $\overline{X+1}$.

b) *Schreiben Sie* die 4×4-Additionstabelle für den Ring E aus. *Folgern Sie*, dass die additive Gruppe von E zur Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorph ist.

c) *Schreiben Sie* die 4×4-Multiplikationstabelle für den Ring E aus. *Folgern Sie*, dass die multiplikative Gruppe $E^\times$ zur Gruppe $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ isomorph ist und, dass E ein Körper ist.

Abgabe bis Freitag, 24. Juni 2022, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf