Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2022

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 10. Juni 2022

# Lineare Algebra II

## Übungsblatt 7

Aufgrund des Feiertags nächste Woche gibt es auf diesem und dem nächsten Übungsblatt nur 3 Aufgaben.

**Aufgabe 1.** $(1+2+1$ Punkte$)$. Wir betrachten die durch

$$F(x) := 3x_1^2 + 8x_1x_2 + 3x_2^2 + \sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}x_2$$

definierte Abbildung $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sowie die Quadrik $C := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid F(x) = \frac{6}{7}\}$. Mittels Hauptachsentransformation der Form $x \mapsto y = Tx + v$ für ein $T \in \mathrm{O}(2)$ und ein $v \in \mathbb{R}^2$ möchten wir $C$ auf die Normalform $\frac{y_1^2}{c_1^2} - \frac{y_2^2}{c_2^2} = 1$ mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ bringen. Dann ist ersichtlich, dass $C$ eine Hyperbel ist.

a) *Schreiben Sie* $F$ in die Form $F(x) = x^tAx + b^tx$ mit einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und einem Spaltenvektor $b \in \mathbb{R}^2$ um.

b) *Finden Sie* eine orthogonale Basiswechselmatrix $S \in \mathrm{O}(2)$, so dass $D = S^tAS$ Diagonalgestalt hat und *zeigen Sie*, dass dann mit $x \mapsto z = S^tx$ die Gleichung von $C$ in $z^tDz + b^tSz = \frac{6}{7}$ überführt wird.

c) *Schreiben Sie* die Gleichung $z^tDz + b^tSz = \frac{6}{7}$ mittels quadratischer Ergänzung in die Form $\frac{(z_1+\alpha)^2}{c_1^2} - \frac{(z_2+\beta)^2}{c_2^2} = 1$ mit geeigneten Zahlen $\alpha, \beta, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ um. Mit $x \mapsto y = S^tx + \left(\begin{smallmatrix}\alpha\\ \beta\end{smallmatrix}\right)$ ist dann die Hauptachsentransformation vollzogen.

**Aufgabe 2.** $(1+2+1$ Punkte$)$. Sei $C$ eine Quadrik in $\mathbb{R}^2$, d.h. es gibt eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, einen Spaltenvektor $b \in \mathbb{R}^2$ und ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für $q(x) := x^tAx + 2b^tx + c$ die Gleichung $C = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid q(x) = 0\}$ gilt. So ein $C$ nennt man auch einen *allgemeinen Kegelschnitt*. Wir bezeichnen mit $\tilde{A} = \left(\begin{smallmatrix}A & b\\ b^t & c\end{smallmatrix}\right)$ die zusammengesetzte Matrix wie in der Vorlesung. In dieser Aufgabe möchten wir untersuchen, ob der Kegelschnitt $C$ tatsächlich der Schnitt eines Doppelkegels in $\mathbb{R}^3$ mit einer Ebene ist.

a) Für $x \in \mathbb{R}^3$ sei $Q(x) := x^t\tilde{A}x$. *Zeigen Sie*: $C$ kann als Schnitt der Nullstellenmenge von $Q$ mit der Ebene $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 1\}$ aufgefasst werden.

b) *Zeigen Sie*: Sind alle Eigenwerte von $\tilde{A}$ ungleich Null und haben das gleiche Vorzeichen, so gilt $C = \varnothing$.

c) *Zeigen Sie*: Ist $\operatorname{rg} \tilde{A} = 3$ und $C \neq \varnothing$, so gibt es eine Matrix $T \in \mathrm{O}(3)$ und Zahlen $\alpha, \beta > 0$, so dass für die orthogonale Transformation $x \mapsto z = Tx$ des Koordinatensystems gilt:

$$Q(x) = 0 \iff \alpha z_1^2 + \beta z_2^2 - z_3^2 = 0.$$

Die Nullstellenmenge von $Q$ ist also ein elliptischer Doppelkegel.

**Aufgabe 3.** (4 Punkte). (*Erinnerung: In unserer Konvention haben Ringe immer ein Einselement und Ringhomomorphismen schicken das Einselement auf das Einselement.*) Sei $R$ ein kommutativer Ring. *Zeigen Sie*, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(i) $R$ ist ein Körper.

(ii) $R \neq 0$ und jeder Ringhomomorphismus $R \to S$ in einen Ring $S \neq 0$ ist injektiv.

(iii) $R$ besitzt genau zwei (verschiedene) Ideale.

---

Abgabe bis Freitag, 17. Juni 2022, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf