Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2022

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 03. Juni 2022

Lineare Algebra II

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. (4 Punkte). Sei V ein euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension und seien $f, g \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(V)$ selbstadjungierte Endomorphismen. *Zeigen Sie oder widerlegen Sie*:

a) $f + g$ ist selbstadjungiert.
b) $f \circ g$ ist selbstadjungiert.
c) f^k ist selbstadjungiert für jedes $k \in \mathbb{N}$.
d) $f \circ g + g \circ f$ ist selbstadjungiert.

Aufgabe 2. (4 Punkte). Ein selbstadjungierter Endomorphismus φ auf einem euklidischem bzw. unitärem $\mathbb{K}$-Vektorraum V endlicher Dimension heißt positiv definit (bzw. positiv semi-definit), falls $\langle \varphi(x), x \rangle > 0$ (bzw. $\langle \varphi(x), x \rangle \geq 0$) für alle $x \in V \setminus \{0\}$. Entsprechend heißt eine symmetrische bzw. Hermitesche Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ positiv definit (bzw. positiv semi-definit), falls $x^t A \overline{x} > 0$ (bzw. $x^t A \overline{x} \geq 0$) für alle Spaltenvektoren $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Mit dem Spektralsatz zeigt man leicht: Ein selbstadjungiertes $\varphi \in \mathrm{End}(V)$ ist genau dann positiv definit (bzw. positiv semi-definit), wenn alle Eigenwerte von φ positiv (bzw. nicht-negativ) sind.
Sei nun $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine positiv semi-definite symmetrische bzw. Hermitesche Matrix. *Zeigen Sie*: Es existiert eine eindeutige positiv semi-definite symmetrische bzw. Hermitesche Matrix B derart, dass $B^2 = A$. Dieses B wird auch mit $\sqrt{A}$ bezeichnet.

Aufgabe 3. (4 Punkte). *Zeigen Sie*, dass

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

positiv semi-definit ist und *berechnen Sie* $\sqrt{A}$.

Aufgabe 4. (4 Punkte). Sei $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. *Zeigen Sie*: Es existiert eine eindeutige orthogonale bzw. unitäre Matrix $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und eine eindeutige positiv definite symmetrische bzw. Hermitesche Matrix $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$, so dass $A = UP$.
Hinweis: Für $n = 1$ haben wir die Polarkoordinatendarstellung $a = e^{i\theta}|a| = up$ mit $p = |a| = \sqrt{a^* \cdot a}$ und $u = ap^{-1}$. Verallgemeinern Sie dies auf beliebiges n mit Hilfe von Aufgabe 2.

Abgabe bis Freitag, 10. Juni 2022, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf