Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2022

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 27. Mai 2022

Lineare Algebra II

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. (1.5 + 1 + 1.5 Punkte). Eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ heißt *Drehung*, wenn eine Orthonormalbasis $X = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^3$ existiert, so dass die Darstellungsmatrix $A_{\varphi,X,X}$ die Gleichung

$$A_{\varphi,X,X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

für einen Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ erfüllt. Dies entspricht der anschaulichen Vorstellung einer Drehung im $\mathbb{R}^3$ an der Drehachse $\mathbb{R}v_1$ um den Winkel α. In dieser Aufgabe möchten wir *Eulers Satz über Drehungen im dreidimensionalen euklidischen Raum* beweisen, welcher besagt, dass die Hintereinanderausführung zweier Drehungen wieder eine Drehung ist.

a) Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Isometrie. *Zeigen Sie*, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
   (i) φ ist eine Drehung.
   (ii) $\det(\varphi) = 1$.
   (iii) 1 ist ein Eigenwert von φ und für jede ONB $X = (v_1, v_2, v_3)$ von $\mathbb{R}^3$ mit $\varphi(v_1) = v_1$ gilt
   $$A_{\varphi,X,X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

b) Folgern Sie Eulers Satz. Folgern Sie zudem den *Satz vom Fußball*: Bei jedem Fußballspiel, in dem nur ein Ball benutzt wird, gibt es zwei Punkte auf der Oberfläche des Balles, die sich zu Beginn der ersten und der zweiten Halbzeit (wenn der Ball genau auf dem Anstoßpunkt liegt) an der gleichen Stelle im umgebenden Raum befinden.

c) In dieser Teilaufgabe möchten wir Eulers Satz an einem Beispiel verifizieren. Sei dazu E die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Es bezeichne f die Drehung um den Winkel α um die x-Achse und g die Drehung um den Winkel γ um die z-Achse, d.h. wir haben
   $$A_{f,E,E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_{g,E,E} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie im Fall $\alpha = \gamma = \frac{\pi}{2}$ für $g \circ f$ eine ONB wie in $(*)$ und geben Sie die Drehachse und den Drehwinkel von $g \circ f$ an.

Aufgabe 2. (4 Punkte). Der (unorientierte) Winkel $\measuredangle(x, y)$ zwischen $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist gegeben durch

$$\measuredangle(x, y) = \arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Ein $g \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ heißt *winkeltreu*, falls g injektiv ist und

$$\measuredangle(g(x), g(y)) = \measuredangle(x, y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Zeigen Sie: g ist genau dann winkeltreu, wenn eine Isometrie $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ und ein $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ existieren mit $g = \lambda \cdot \varphi$.

Abgabe bis Freitag, 03. Juni 2022, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf