Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2022

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 20. Mai 2022

Lineare Algebra II

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. (2 Punkte). Sei V ein euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension und sei $\varphi \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ normal. *Zeigen Sie*: Sind $x, y \in V$ zwei Eigenvektoren von φ zu verschiedenen Eigenwerten, so sind x und y orthogonal zueinander.

Aufgabe 2. $(1.5 + 0.5 + 2$ Punkte). Auf $\mathbb{K}^3$ betrachten wir den durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

definierten Endomorphismus $\varphi \colon \mathbb{K}^3 \to \mathbb{K}^3, x \mapsto Ax$.

a) *Zeigen Sie*: φ ist normal.
b) Ist A diagonalisierbar in $\mathbb{R}^{3\times 3}$?
c) A ist sicherlich diagonalisierbar in $\mathbb{C}^{3\times 3}$ (warum?). *Berechnen Sie* eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^3$ bestehend aus Eigenvektoren von φ.

Aufgabe 3. $(2+2$ Punkte). Sei V ein euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension und sei $\varphi \in \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$. Sei $\overline{\mathbb{K}} := \mathbb{C}$. Dann gilt $\mathbb{K} \subseteq \overline{\mathbb{K}}$ und jedes nicht-konstante Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{K}$ hat eine Nullstelle in $\overline{\mathbb{K}}$.

a) *Zeigen Sie*: Ist φ eine Isometrie, so gilt $|\lambda| = 1$ für jeden Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ von φ. Gilt auch die Umkehrung?
b) *Zeigen Sie*: Ist φ normal und gilt $|\lambda| = 1$ für jede Nullstelle $\lambda \in \overline{\mathbb{K}}$ des charakteristischen Polynoms von φ, so ist φ eine Isometrie.

Aufgabe 4. $(2 + 1 + 1$ Punkte).

a) Sei $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine Isometrie. Seien $x_1, \ldots, x_r \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und sei $P = P(x_1, \ldots, x_r)$ das von ihnen aufgespannte r-dimensionale Parallelotop in $\mathbb{R}^n$. *Zeigen Sie*: $\operatorname{Vol}(\varphi(P)) = \operatorname{Vol}(P)$.
b) Sei umgekehrt $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, welche das Volumen von jedem r-dimensionalen Parallelotop für jedes $r = 1, \ldots, n$ erhält, d.h. es gilt $\operatorname{Vol}(\varphi(P)) = \operatorname{Vol}(P)$ für jedes P wie in a). *Zeigen Sie*: φ ist eine Isometrie.
c) Sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung, welche das Volumen von jedem n-dimensionalen Parallelotop erhält. Muss dann f bereits eine Isometrie sein?

Aufgabe 5. (2 Punkte). *Finden Sie* für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Beispiel von einer Abbildung $f \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, welche $f(0) = 0$ und $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ erfüllt, jedoch keine Isometrie ist (weil sie nicht linear ist).
Fun Fact: Man kann beweisen, dass es in $\mathbb{R}^n$ kein solches Beispiel geben kann: Jede Abbildung $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(0) = 0$ und $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ ist bereits linear.

Abgabe bis Freitag, 27. Mai 2022, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf