Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2022

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 13. Mai 2022

Lineare Algebra II

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. (4 Punkte). *Berechnen Sie* zu jeder der folgenden Bilinearformen Φ auf dem gegebenen $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Basis X die zugehörige Matrix $A_{\Phi,X}$ und *entscheiden Sie*, ob Φ symmetrisch bzw. nicht-ausgeartet ist:

a) $V = \mathbb{R}^2$ mit Standardbasis X und $\Phi(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 - x_2y_2$.

b) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit Basis $X = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ bestehend aus

$$E_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), E_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), E_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), E_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$$

und $\Phi(A, B) = \mathrm{Spur}(A \cdot B)$. *Zur Erinnerung: Die Spur einer Matrix ist die Summe ihrer Diagonalelemente.*

c) $V = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum aller Polynomfunktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vom Grad ≤ 2 mit Basis $X = (1, t, t^2)$ und $\Phi(f, g) = \int_0^1 f'(t)g(t)dt$ wobei f' die Ableitung von f bezeichnet.

Aufgabe 2. ($2 + 2$ Punkte). Sei V ein 3-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, $X = (v_1, v_2, v_3)$ eine Basis von V und Φ eine Bilinearform auf V mit

$$A_{\Phi,X} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right).$$

a) Ist Φ ein Skalarprodukt?

b) *Zeigen Sie*, dass $Y = (v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_2)$ eine Basis von V ist, und *berechnen Sie* die zugehörige Matrix $A_{\Phi,Y}$.

Aufgabe 3. (2 Punkte). Zu jeder zweimal stetig partiell differenzierbaren Abbildung $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ assoziiert man in der Analysis in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ das Differential $Dg(x_0) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_0), \ldots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0)\right)$ und die Hesse-Matrix der zweiten partiellen Ableitungen $H_g(x_0) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)\right)$, welche symmetrisch ist. Laut einem Theorem gilt: Ist x_0 derart, dass $Dg(x_0) = 0$ gilt und die durch die Matrix $H_g(x_0)$ definierte symmetrische Bilinearform positiv definit ist, so hat g in x_0 ein lokales Minimum. Wir betrachten $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^3 + y^3 + x^2y + 5x^2 + 5y^2 + 2xy$. Dann ist das Differential

$$Df(x, y) = \Big(3x^2 + 2xy + 10x + 2y, \quad 3y^2 + x^2 + 10y + 2x\Big)$$

und

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 10 + 6x + 2y & 2 + 2x \\ 2 + 2x & 10 + 6y \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: f hat im Punkt $(0, 0)$ ein lokales Minimum.

Aufgabe 4. (2 Punkte). Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n \geq 2$. *Konstruieren Sie* eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform bzw. Hermitesche Form Φ auf V sowie einen nicht-trivialen Untervektorraum $U \subseteq V$, so dass $\Phi|_{U\times U}$ ausgeartet ist.

Aufgabe 5. (4 Punkte). Sei V ein euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension, φ ein Endomorphismus von V und φ^* die zugehörige adjungierte Abbildung. Wir nehmen an, dass $\varphi = \varphi^2$ gilt. *Zeigen Sie*: Es gilt genau dann $\varphi = \varphi^*$, wenn $\ker\varphi$ und $\operatorname{im}\varphi$ orthogonal zueinander sind.

Abgabe bis Freitag, 20. Mai 2022, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf