Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Sommersemester 2022

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 29. April 2022

Lineare Algebra II

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. (4 Punkte). Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $(v_1, \ldots, v_r)$ eine orthonormale Familie in V. *Beweisen Sie*, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $(v_1, \ldots, v_r)$ ist eine Basis von V.
(ii) Ist $v \in V$, so folgt aus $\langle v, v_i \rangle = 0$ für alle i, dass $v = 0$ ist.
(iii) Ist $v \in V$, so gilt $v = \sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle \cdot v_i$.
(iv) Für alle $v, w \in V$ gilt $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^r \langle v, v_i \rangle \cdot \langle v_i, w \rangle$.
(v) Für alle $v \in V$ gilt $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^r |\langle v, v_i \rangle|^2$, wobei $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Aufgabe 2. (1+2+1 Punkte). Sei $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller stetigen Abbildungen $[0, 2\pi] \to \mathbb{R}$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $s_n, c_n \in V$ durch $s_n(x) = \sin(nx)$, $c_n(x) = \cos(nx)$ und betrachten das System von Vektoren

$$X = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, s_1, c_1, s_2, c_2, \ldots, s_n, c_n, \ldots)$$

und den davon erzeugten Untervektorraum $W := \langle X \rangle \subseteq V$. *Zeigen Sie:*

a) Durch $\langle f, g \rangle := \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ ist ein Skalarprodukt auf V definiert.
b) X ist eine Orthonormalbasis von W.
c) Ist $f(x) = \frac{a_0}{2}\sqrt{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$, so gilt $a_k = \langle f, c_k \rangle$ und $b_k = \langle f, s_k \rangle$.
Anmerkung: Für $g \in V$ heißen $\langle g, c_k \rangle$ und $\langle g, s_k \rangle$ die Fourierkoeffizienten von g.

Aufgabe 3. (2 + 2 Punkte). Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. *Zur Erinnerung: Eine Norm auf V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit den Eigenschaften*

$$\|v\| = 0 \iff v = 0, \quad \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|, \quad \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

für alle $v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$. Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V, so definiert nach Vorlesung $\|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle}$ eine Norm auf V. In dieser und der nächsten Aufgabe möchten wir den Zusammenhang zwischen Normen und Skalarprodukten genauer untersuchen.

a) *Zeigen Sie:* Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf V mit zugehöriger Norm $\|\cdot\|$, so gelten für alle $v, w \in V$ die Gleichungen

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 \tag{$*$}$$

und

$$\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2).$$

b) *Zeigen Sie,* dass für $n \geq 2$ auf dem $\mathbb{R}^n$ durch $\|x\| := \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$ eine Norm definiert ist, für die kein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^n$ existiert mit $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 4. (4 Punkte). Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. *Zeigen Sie:* Ist $\|\cdot\|$ eine Norm auf V, die die Gleichung $(*)$ erfüllt, so existiert ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V mit $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ für alle $v \in V$.

Abgabe bis Freitag, 06. Mai 2022, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf