Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 04. Februar 2022

Lineare Algebra I

Übungsblatt 13

Aufgabe 1. (4 Punkte). Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2a & b & a \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar?

Aufgabe 2. $(3+1$ Punkte$)$.

a) Seien $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. *Zeigen Sie*: Das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_2 \\ .. & .. & .. & \ldots & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

ist $T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \ldots + a_1T + a_0$. *Hinweis*: Verwenden Sie vollständige Induktion.

b) Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ mit $f \circ f = f$. *Zeigen Sie*: f ist diagonalisierbar.

Aufgabe 3. (4 Punkte). Seien $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ zwei Matrizen mit den charakteristischen Polynomen $\chi_A(T) = T^3 - 2T^2 + T$ und $\chi_B(T) = T^3 - 6T^2 + 11T - 6$. *Zeigen Sie*: Der Kern von AB hat die Dimension 1.

Aufgabe 4. $(3+1$ Punkte$)$. Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 10y' + 16y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \tag{$*$}$$

wobei y'' die zweite und y' die erste Ableitung von $y \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bezeichnet. Nach einem Satz aus der Analysis besitzt $(*)$ eine eindeutige Lösung $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. In dieser Aufgabe möchten wir zeigen, wie man mit der Eigenwerttheorie von Matrizen die Lösung herleiten kann. Dazu machen wir aus $(*)$ mit $u_0 = y$ und $u_1 = y'$ das System von Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u_0' &= & u_1, \quad & u_0(0) = 1, \\ u_1' &= -16u_0 - 10u_1, \quad & & u_1(0) = 0. \end{aligned} \tag{$**$}$$

Mit $u = \left(\begin{smallmatrix} u_0 \\ u_1 \end{smallmatrix}\right)$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -16 & -10 \end{smallmatrix}\right)$ lässt sich $(**)$ schreiben als $u' = A \cdot u$ und $u(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Eine Diagonalisierung von A entspricht einer Entkoppelung von $(**)$.

a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenräume von A. Konstruieren Sie $S \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$, sodass $D := S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

b) *Zeigen Sie*: Erfüllt $f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}$ die Gleichung $f' = D \cdot f$, so erfüllt $u := S \cdot f$ die Gleichung $u' = A \cdot u$. Bestimmen Sie im Anschluss alle f mit $f' = D \cdot f$. (Sie dürfen dabei benutzen, dass die allgemeine Lösung von $g' = a \cdot g$ mit $a \in \mathbb{R}$ durch $g(x) = c\exp(ax)$ gegeben ist.) Leiten Sie daraus die Lösung von $(**)$ her und lesen Sie daran die Lösung von $(*)$ ab.

Dies ist das letzte Übungsblatt. Abgabe bis Freitag, 11. Februar, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf