Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 28. Januar 2022

Lineare Algebra I

Übungsblatt 12

Aufgabe 1. (4 Punkte). Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & -5 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie $\ker(\lambda E_3 - A)$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$. Wie viele verschiedene Eigenwerte hat A? Ist A diagonalisierbar?

Aufgabe 2. (4 Punkte). Für $n \geq 2$ betrachten wir die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} (-)^t \colon \mathbb{Q}^{n\times n} &\to \mathbb{Q}^{n\times n} \\ A &\mapsto A^t. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{Q}} \ker(\lambda \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{Q}^{n\times n}} - (-)^t)$ für alle $\lambda \in \mathbb{Q}$. Was sind die Eigenwerte von $(-)^t$? Ist $(-)^t$ diagonalisierbar?

Aufgabe 3. ($2+2$ Punkte). Sei V ein K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$.

a) Seien v bzw. w Eigenvektoren von f zu Eigenwerten λ bzw. μ mit $\lambda \neq \mu$. Seien $a, b \in K^\times$. *Zeigen Sie:* $av + bw$ ist kein Eigenvektor von f.

b) Sei $P \in K[T]$. *Zeigen Sie:* Ist λ ein Eigenwert von f, so ist $P(\lambda)$ ein Eigenwert von $P(f)$. Dabei ist $P(f) = \sum_{i=0}^r a_i f^i \in \mathrm{End}(V)$ für $P = \sum_{i=0}^r a_i T^i$.

Aufgabe 4. (4 Punkte). Gegeben sei ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum V und $f, g \in \mathrm{End}(V)$. *Zeigen Sie:* $f \circ g$ und $g \circ f$ haben dieselben Eigenwerte.

Abgabe bis Freitag, 04. Februar, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf