Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 21. Januar 2022

Lineare Algebra I

Übungsblatt 11

Aufgabe 1. $(2+1+1$ Punkte).

a) *Zeigen Sie*: Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ antisymmetrisch (d. h. es gilt $A^t = -A$), so ist A nicht invertierbar.

b) Gibt es eine antisymmetrische invertierbare reelle 2×2-Matrix?

c) Gibt es eine antisymmetrische invertierbare 3×3-Matrix über einem anderen Körper als den reellen Zahlen?

Aufgabe 2. $(2+2$ Punkte). Sei K ein Körper.

a) Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K, $n = \dim V$ und $f \in \mathrm{End}(V)$. Für ein $v \in V$ sei $\{v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v)\}$ eine Basis von V. Es gibt also $a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$, sodass

$$f^n(v) = a_{n-1}f^{n-1}(v) + \ldots + a_1 f(v) + a_0 v.$$

Zeigen Sie: $\det(f) = (-1)^{n+1}a_0$.

b) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \ldots & 1 \\ .. & .. & .. & \ldots & .. \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Aufgabe 3. (4 Punkte). Seien v, w zwei verschiedene Punkte des $\mathbb{R}^2$ und $L \subseteq \mathbb{R}^2$ die Gerade durch v und w. *Zeigen Sie*:

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ v_1 & w_1 & x \\ v_2 & w_2 & y \end{pmatrix} = 0\}.$$

Aufgabe 4. (4 Punkte). Wir betrachten die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie A^{ad} und berechnen Sie $A^{\mathrm{ad}} \cdot A$. Ist A invertierbar?

Abgabe bis Freitag, 28. Januar, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf