Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 14. Januar 2022

Lineare Algebra I

Übungsblatt 10

Aufgabe 1. (4 Punkte). Im $\mathbb{R}^3$ seien die Basen

$$X = ((1,-1,2),(2,3,7),(2,3,6)) \quad \text{und} \quad Y = (\underbrace{(1,2,-1)}_{=y_1},\underbrace{(-2,-5,2)}_{=y_2},\underbrace{(3,10,-2)}_{=y_3})$$

gegeben. Weiter sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die durch

$$y_1 \mapsto 5y_1 + 5y_2, \quad y_2 \mapsto -5y_1 + 5y_3 \quad \text{und} \quad y_3 \mapsto 5y_2 + 5y_3$$

definierte lineare Abbildung. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen $A_{f,X,X}, A_{f,X,Y}$, $A_{f,Y,X}$ und $A_{f,Y,Y}$.
Hinweis: Die Basiswechselmatrix $A_{\mathrm{id},X,Y}$ wurde in Aufgabe 1 auf Übungsblatt 9 berechnet.

Aufgabe 2. $(2+2$ Punkte). Wir betrachten die Permutationen

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_7, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in S_7.$$

a) Berechnen Sie jeweils die Anzahl der Fehlstände und das Signum von σ und τ. Stellen Sie zudem σ und τ jeweils als Produkt von Transpositionen dar.

b) Berechnen Sie $\sigma \circ \tau, \tau \circ \sigma, \sigma^{-1}$ und τ^{-1}. Berechnen Sie für jede dieser Permutationen das Signum.

Aufgabe 3. (4 Punkte). Sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, U ein k-dimensionaler K-Untervektorraum von V und sei $x_{k+1}, \ldots, x_n$ ein fest gegebenes System von Vektoren in V. Sei $\Delta\colon V^n \to K$ eine Determinantenfunktion. Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{aligned} \Delta_U\colon U^k &\to K, \\ (u_1, \ldots, u_k) &\mapsto \Delta(u_1, \ldots, u_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

eine Determinantenfunktion auf U definiert wird. Wann ist Δ_U nicht trivial?

Aufgabe 4. (4 Punkte). Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}.$$

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, dass die Determinante einer unteren Dreiecksmatrix (d.h. einer Matrix, deren Einträge oberhalb der Diagonale alle gleich Null sind) das Produkt ihrer Diagonaleinträge ist. Überführen Sie A durch Spaltenumformungen in eine untere Dreiecksmatrix.

Abgabe bis Freitag, 21. Januar, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf