

Lineare Algebra I

Übungsblatt 9

Aufgabe 1. (2 + 2 Punkte). Im \mathbb{R}^3 seien die Basen

$$X = ((1, -1, 2), (2, 3, 7), (2, 3, 6)) \quad \text{und} \quad Y = ((1, 2, -1), (-2, -5, 2), (3, 10, -2))$$

gegeben.

- Berechnen Sie die Basiswechselmatrix $A_{\text{id}, X, Y}$.
- Bestimmen Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = 2 \cdot (1, -1, 2) + 9 \cdot (2, 3, 7) - 8 \cdot (2, 3, 6)$$

bezüglich der Basis Y .

Aufgabe 2. (4 Punkte). Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie die linearen Gleichungssysteme $A \cdot x = b$, $B \cdot x = b$ und $C \cdot x = b$ für $b \in \mathbb{R}^4$ auf universelle Lösbarkeit in $x \in \mathbb{R}^3$ bzw. $x \in \mathbb{R}^4$ bzw. $x \in \mathbb{R}^5$. Sind diese Systeme speziell für $b = (1, 0, 0, 0)^t$ lösbar?

Bonusaufgabe 3. (8 · 0,5 Bonuspunkte). Sei K ein Körper. Zeigen Sie oder widerlegen Sie:

- Für $A, B \in K^{n \times n}$ invertierbare Matrizen sind auch $A \cdot B$ und $A + B$ invertierbar.
- Ist $f: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen K -Vektorräumen und sind $v_1, v_2 \in V$ linear unabhängig, so sind auch $f(v_1), f(v_2) \in W$ linear unabhängig.
- Sind $A, B \in K^{n \times n}$ Matrizen mit $ABAB = 0$, so gilt $BABA = 0$.
- Sei $A \in K^{n \times n}$. Ist das lineare Gleichungssystem $A \cdot x = b$ universell lösbar, so ist auch $A^2 \cdot x = b$ universell lösbar.
- Sei $A \in K^{m \times n}$ und $C \in \text{GL}_n(K)$. Dann sind die Lösungsräume $M_{A,0}$ und $M_{AC,0}$ isomorph.
- Seien V, W Vektorräume über K sowie $f: V \rightarrow W$ eine von der Nullabbildung verschiedene lineare Abbildung. Ist $\dim V = \dim W < \infty$, so ist f ein Isomorphismus.

g) Es ist

$$\{f \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4) \mid \dim \ker f > 2\}$$

ein Untervektorraum von $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^5, \mathbb{R}^4)$.

h) Sei V ein K -Vektorraum der Dimension n und sei $v_1, \dots, v_m \in V$ eine Familie von Vektoren. Falls $m > n$, so ist die Familie linear abhängig.

Bonusaufgabe 4. (1 + 1 + 1 + 1 Bonuspunkte). Im \mathbb{R} -Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \text{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der Folgen reeller Zahlen betrachten wir den Untervektorraum V bestehend aus allen Folgen g , die der linearen Rekursionsgleichung

$$g(n+2) = g(n+1) + g(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

genügen. (Dass V ein Untervektorraum ist, sieht man wie in Aufgabe 1 auf Übungsblatt 3.) Ein bestimmtes Element in V ist die Folge f der *Fibonacci-Zahlen*: $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 1, f(3) = 2, f(4) = 3, f(5) = 5$ usw.

a) *Zeigen Sie*: Die Abbildung

$$p: V \rightarrow \mathbb{R}^2, g \mapsto (g(0), g(1))$$

ist ein Isomorphismus. Bestimmen Sie $\dim V$.

Die positive Lösung $A = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ der quadratischen Gleichung $x^2 = x + 1$ heißt *Goldener Schnitt*. Wir betrachten auch die negative Lösung $B = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und definieren die Folgen $a, b \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ durch $a(n) = A^n$ und $b(n) = B^n$.

b) *Zeigen Sie*: $a, b \in V$.

c) *Zeigen Sie*: a und b sind linear unabhängig.

d) Begründen Sie, wieso es eindeutige reelle Zahlen λ, μ gibt, so dass $f = \lambda a + \mu b$. Bestimmen Sie λ und μ .

Damit haben wir eine geschlossene Formel für die Fibonacci-Zahlen hergeleitet:

$$f(n) = \lambda A^n + \mu B^n.$$

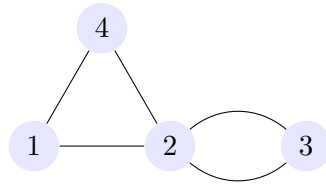
Bonusaufgabe 5. (2 Bonuspunkte). In dieser Aufgabe möchten wir mit Hilfe von Drehmatrizen leicht die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus herleiten. Aus der Vorlesung kennen wir die Drehung um $0 \in \mathbb{R}^2$ mit Winkel α :

$$f_{\alpha}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\cos(\alpha)x - \sin(\alpha)y, \sin(\alpha)x + \cos(\alpha)y).$$

Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A_{\alpha} := A_{f_{\alpha}, X, X}$, wobei X die Standardbasis des \mathbb{R}^2 bezeichnet. Beweisen Sie nun die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus, indem Sie $A_{\alpha+\beta}$ und $A_{\alpha} \cdot A_{\beta}$ betrachten und einen Satz aus der Vorlesung zitieren.

Weihnachtsaufgabe 6. (3 + 1 Bonuspunkte). Es dürfte wohl eine der größten logistischen Herausforderungen überhaupt sein: Millionen von Geschenken auf der ganzen Welt verteilen -- und das alles in einer einzigen Nacht. Der Weihnachtsmann muss seine Route

gut planen, also stellt er zunächst die vier Ecken der Welt, in die er hinfliegen muss, als Knoten im folgenden Graphen dar:



Die Kanten im Graphen stellen direkte Flugwege dar und mit $w(i, j)$ wird die Anzahl aller Kanten, welche die Knoten i und j verbinden, bezeichnet. Unter einer ***n-Schritt-Fahrt von i nach j*** versteht der Weihnachtsmann einen Pfad von i nach j , der aus n Kanten zusammengesetzt ist.¹ Wenn man von 1 nach 4 über die eindeutige Kante dazwischen läuft und dann wieder über diese zurück zu 1, erhält man ein Beispiel für eine 2-Schritt-Fahrt von 1 nach 1. Der Grund, wieso sich der Weihnachtsmann Gedanken über n -Schritt-Fahrten machen muss, ist, dass Rentier Rudolph nur unter folgender Bedingung fliegen möchte:

(*) Es gibt ein $d \in \mathbb{N}$, so dass von jedem Knoten aus jeder andere Knoten über eine d -Schritt-Fahrt erreichbar ist.

Anders will es der Rudolph nicht haben. (Diesem Rentier sind solche Bedingungen viel wichtiger als Effizienz.) Wir helfen dem Weihnachtsmann, indem wir zeigen, dass (*) erfüllt ist, und sogar das kleinstmögliche solche d bestimmen.

Dazu gehen wir wie folgt vor: Es bezeichne $f_n(i, j)$ die Anzahl aller n -Schritt-Fahrten von i nach j . Wir definieren die Matrizen $W = (w(i, j))_{i,j}$ und $F_n = (f_n(i, j))_{i,j}$.

a) Zeigen Sie:

$$F_{n+1} = F_n \cdot W$$

für alle $n \geq 1$.

Folgern Sie:

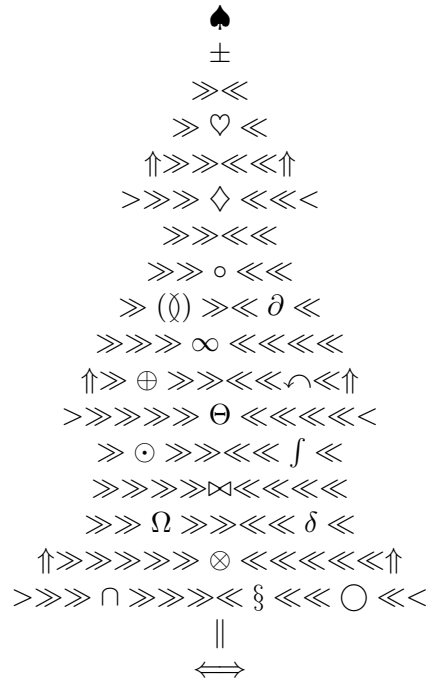
$$F_n = W^n.$$

(Diese Formeln gelten allgemein für jeden Graphen.)

b) Berechnen Sie W und finden Sie d durch Potenzieren von W . (Sie dürfen dafür einen Matrizenrechner benutzen.)

¹Formale Definition: Eine n -Schritt-Fahrt von i nach j ist eine Folge (e_1, \dots, e_n) von n Tripeln $e_k = (a_k, s_k, b_k)$ bestehend aus zwei Knoten a_k, b_k und einer Kante s_k zwischen a_k und b_k , so dass folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $a_1 = i$ (d.h. „der Anfangspunkt der ersten Kante ist i “),
- $b_k = a_{k+1}$ (d.h. „der Endpunkt jeder Kante ist gleich dem Anfangspunkt der darauffolgenden Kante“), und
- $b_n = j$ (d.h. „der Endpunkt der letzten Kante ist j “).



Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!