Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 10. Dezember 2021

Lineare Algebra I

Übungsblatt 8

Aufgabe 1. $(2+2$ Punkte). Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Vektoren

$$u_1 = (1,-1,0,1), \quad u_2 = (2,-2,1,3), \quad w_1 = (2,1,3,0), \quad w_2 = (-1,-1,1,1).$$

Seien $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ und $W = \langle w_1, w_2 \rangle$.

a) Berechnen Sie eine Basis von $U + W$ und bestimmen Sie $\dim(U+W)$. Verwenden Sie dazu das Gauß-Verfahren.

b) Berechnen Sie jeweils eine Basis und die Dimension von U, W und $U \cap W$. *Hinweis:* Dieser Aufgabenteil lässt sich ohne weitere Rechnungen lösen.

Aufgabe 2. $(2+2$ Punkte). Wir betrachten die Linearformen

$$\begin{aligned}
f_1 &\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}, (x_1,\dots,x_5) \mapsto x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \\
f_2 &\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}, (x_1,\dots,x_5) \mapsto x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \\
f_3 &\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}, (x_1,\dots,x_5) \mapsto 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 \\
f_4 &\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}, (x_1,\dots,x_5) \mapsto x_1 - x_2 + x_4 - x_5.
\end{aligned}$$

a) Gegeben sei die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4, x \mapsto (f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x))$. Geben Sie eine Basis von $\operatorname{im} f$ an und bestimmen Sie $\dim \operatorname{im} f$ und $\dim \ker f$.

b) Prüfen Sie, ob (f_1, f_2, f_3, f_4) ein linear unabhängiges System im Dualraum $(\mathbb{R}^5)^*$ bildet.

Hinweis: Beide Aufgabenteile kann man lösen, indem man eine geeignete Matrix auf Zeilenstufenform bringt, aus der man alles ablesen kann.

Aufgabe 3. $(2+2$ Punkte). Prüfen Sie, ob folgende Matrizen aus $\mathbb{Q}^{3\times 3}$ invertierbar sind und berechnen Sie (falls möglich) die Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 7 & -7 \\ 11 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. $(2+2$ Punkte). Sei K ein Körper. *Zeigen Sie*:

a) Ist $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix, für die ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $A^m = 0$, so ist $E - A$ invertierbar. Wie sieht die inverse Matrix aus?

b) Ist $M \in K^{n\times n}$ so, dass $M^2 + 2M + E = 0$ gilt, so ist M ist invertierbar.

Abgabe bis Freitag, 17. Dezember, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf