Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 03. Dezember 2021

Lineare Algebra I

Übungsblatt 7

Aufgabe 1. (4 Punkte). Berechnen Sie alle möglichen (d.h. definierten) Produkte folgender Matrizen mit rationalen Einträgen:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. ($1+1+1+1$ Punkte). Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und seien $f, g \in \mathrm{Hom}_K(V, V)$ mit

$$f + g = \mathrm{id} \quad \text{und} \quad f \circ f = f.$$

Zeigen Sie:

a) $g \circ g = g$ und $f \circ g = g \circ f = 0$.

b) $V = \operatorname{im} f \oplus \operatorname{im} g$.

c) $\ker f = \operatorname{im} g$ und $\ker g = \operatorname{im} f$.

d) Sei $n \in \mathbb{N}$ un $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix mit $A^2 = A$. *Zeigen Sie*: $\mathrm{rg_s}\, A + \mathrm{rg_s}(E - A) = n$, wobei $E \in K^{n \times n}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

Aufgabe 3. ($2+2$ Punkte). Sei K ein Körper, $V \neq 0$ ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum mit den Basen X, Y und V^* sein Dualraum mit den dualen Basen X^*, Y^*. Sei $A := A_{\mathrm{id},X,Y}$.

a) *Zeigen Sie*: A ist invertierbar, d.h. es existiert ein (notwendigerweise eindeutig bestimmtes) $B \in K^{n \times n}$ mit $AB = BA = E$, wobei $E \in K^{n \times n}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.
Man schreibt $A^{-1} := B$.

b) *Zeigen Sie*: $A_{\mathrm{id},X^*,Y^*} = (A^{-1})^t$.

Aufgabe 4. ($1+1+1+1$ Punkte). Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Wir betrachten die kanonische K-lineare Abbildung $\beta\colon V \to V^{**}, v \mapsto \beta_v$ wobei β_v gegeben ist durch $\beta_v\colon V^* \to K, \varphi \mapsto \varphi(v)$. Sei $X = (v_i)_{i \in I}$ eine Basis von V. Wir betrachten auch das System $X^* := (\varphi_i)_{i \in I}$ der durch $\varphi_i(v_j) := \delta_{i,j}$ definierten Linearformen $\varphi_i \in V^*$.
Zeigen Sie:

a) β ist injektiv. (*Hinweis:* Für die Konstruktion von Linearformen mit gewissen Eigenschaften könnte die Existenz komplementärer Untervektorräume hilfreich sein.)

b) X^* ist linear unabhängig.

c) Es existiert ein $g \in V^{**}$ mit $g(u) = 1$ für alle $u \in X^*$.

d) Ist V unendlich-dimensional, so ist β nicht surjektiv. (*Hinweis*: Gilt $g \in \operatorname{im} \beta$?)

Abgabe bis Freitag, 10. Dezember, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf