Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 26. November 2021

Lineare Algebra I

Übungsblatt 6

Aufgabe 1. $(2+2$ Punkte$)$.

a) Geben Sie eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ an, so dass $\ker f = \operatorname{im} f$ gilt. Geben Sie außerdem die Abbildungsmatrix $A_{f,X,X}$ an, wobei X die Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ bezeichnet.

b) Sei $g\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung, so dass

$$\ker g = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 5x_2 \text{ und } x_3 = 7x_4\}.$$

Zeigen Sie: g ist surjektiv.

Aufgabe 2. $(1+1+2$ Punkte$)$. Wählen Sie in den folgenden $\mathbb{R}$-Vektorräumen eine Basis X und bestimmen Sie zum jeweiligen Endomorphismus f die zugehörige Matrix $A_{f,X,X}$.

a) $V = \mathbb{R}^2$ und f sei die Spiegelung an der winkelhalbierenden Geraden $y = x$.

b) $V = \mathbb{R}^2$ und f sei die Drehung um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn.

c) $V = \mathbb{C}$ und f sei die Multiplikation mit $a + bi \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3. $(1+1+2$ Punkte$)$. In dieser Aufgabe dürfen Sie Ihr Schulwissen über die trigonometrischen Funktionen $\sin, \cos \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ verwenden. Wir betrachten das System von Vektoren $X = (\sin, \cos, \sin \cdot \cos, \sin^2, \cos^2)$, den davon erzeugten Untervektorraum $V := \langle X \rangle \subseteq \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und den Endomorphismus $\partial\colon V \to V, f \mapsto f'$, wobei f' die erste Ableitung von f bezeichnet.

a) *Zeigen Sie*, dass X eine Basis von V ist.
Hinweis: Das Einsetzen diverser Nullstellen von sin bzw. cos könnte hilfreich sein.

b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A_{\partial,X,X}$.

c) Geben Sie eine Basis von $\ker \partial$ bzw. $\operatorname{im} \partial$ an.

Aufgabe 4. $(2+1+1$ Punkte$)$. Seien U, V und W endlich-dimensionale Vektorräume über einem Körper K und seien $f \in \operatorname{Hom}_K(V, W)$ und $g \in \operatorname{Hom}_K(U, V)$.

a) *Zeigen Sie:*

$$\dim \ker(f \circ g) \leq \dim \ker f + \dim \ker g. \tag{$*$}$$

b) Geben Sie ein Beispiel an, bei welchem die Ungleichung $(*)$ strikt ist.

c) Geben Sie ein Beispiel an, bei welchem in $(*)$ Gleichheit gilt.

Abgabe bis Freitag, 03. Dezember, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock) oder online via MaMpf