Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 19. November 2021

Lineare Algebra I

Übungsblatt 5

Aufgabe 1. $(1+1+1+1$ Punkte$)$. Welche der folgenden Abbildungen sind K-linear?

a) $f_1\colon \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3, (x,y,z) \mapsto (2x, y-z, x-z)$ über $K=\mathbb{Q}$.

b) $f_2\colon \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f \mapsto f(1)$ über $K=\mathbb{R}$.

c) $f_3\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x+iy \mapsto x-iy$ über $K=\mathbb{R}$.

d) $f_3\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x+iy \mapsto x-iy$ über $K=\mathbb{C}$.

Aufgabe 2. $(1+3$ Punkte$)$. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Für einen K-Endomorphismus $f\colon V \to V$ definieren wir die Menge der *Fixpunkte* von f durch $\operatorname{Fix} f := \{v \in V : f(v) = v\}$.

a) *Zeigen Sie*: $\operatorname{Fix} f$ ist ein Untervektorraum von V.

b) Sei nun $K=\mathbb{R}, V=\mathbb{R}^3$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x$.

Geben Sie jeweils eine Basis von $\ker f, \operatorname{im} f$ und $\operatorname{Fix} f$ an.

Aufgabe 3. $(2+2$ Punkte$)$.

a) *Begründen Sie*, wieso genau eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$L(1,1) = (2,1) \quad \text{und} \quad L(-1,1) = (6,3)$$

existiert. Berechnen Sie $L(1,0)$ und $L(0,1)$ und geben Sie dann die Vorschrift für $L(x,y)$ für beliebige $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ an.

b) Sei K ein Körper und seien V, W Vektorräume über K. Sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $U \neq V$ und sei $g \in \operatorname{Hom}_K(U,W)$ mit $g \neq 0$. Wir definieren $h\colon V \to W$ durch:

$$h(v) := \begin{cases} g(v) & \text{falls } v \in U \\ 0 & \text{falls } v \in V \setminus U. \end{cases}$$

Zeigen Sie: h ist nicht K-linear.

Aufgabe 4. $(1+1+2$ Punkte$)$. Sei K ein Körper und $f\colon V \to W$ eine K-lineare Abbildung zwischen K-Vektorräumen. *Zeigen Sie*:

a) Für jede Teilmenge $A \subseteq V$ gilt $f(\langle A \rangle) = \langle f(A) \rangle$.

b) Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ Vektoren, deren Bilder $f(v_1), \dots, f(v_n) \in W$ linear unabhängig sind. Dann sind auch $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig.

c) Wenn f injektiv ist und $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig sind, dann sind auch die Bilder $f(v_1), \dots, f(v_n) \in W$ linear unabhängig.

Abgabe bis Freitag, 26. November, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat
(Mathematikon, INF 205, 1. Stock)