Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 12. November 2021

Lineare Algebra I

Übungsblatt 4

Aufgabe 1. (1+2+1 Punkte). Geben Sie für folgende K-Vektorräume jeweils eine Basis an:

a) $W_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 2x_1 + x_2 = 0\}$ über $K = \mathbb{R}$.

b) $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 3x_2 + 2x_4 = 0 \text{ und } 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\}$ über $K = \mathbb{R}$.

c) $W_3 = \langle (i, i, 0), (0, 0, 1), (-1, -1, 0) \rangle \subseteq \mathbb{C}^3$ über $K = \mathbb{C}$.

Aufgabe 2. $(2 + 2$ Punkte).

a) Sei K ein Körper. Im K-Vektorraum K^3 betrachten wir die Unterräume

$$V := \langle (1, 0, 0) \rangle \quad \text{und} \quad W := \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle.$$

Zeigen Sie: $K^3 = V \oplus W$.

b) Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ betrachten wir die Unterräume

$$U := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = -f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\},$$
$$G := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) = f(-x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}.$$

Zeigen Sie: $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = U \oplus G$.
Hinweis: Für $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ betrachten Sie

$$f_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ und } f_u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Aufgabe 3. $(1,5 + 1,5 + 1$ Punkte). Seien X, Y und Z Unterräume eines Vektorraums V. Zeigen Sie:

a) $X + (Y \cap Z) \subseteq (X + Y) \cap (X + Z)$.
Finden Sie außerdem ein Beispiel, bei welchem die Inklusion keine Gleichheit ist.

b) $(X \cap Y) + (X \cap Z) \subseteq X \cap (Y + Z)$.
Finden Sie außerdem ein Beispiel, bei welchem die Inklusion keine Gleichheit ist.

c) $X \cap (Y + (X \cap Z)) = (X \cap Y) + (X \cap Z)$.

Aufgabe 4. $(2 + 2$ Punkte). Sei $\mathbb{F}$ ein endlicher Körper mit q Elementen und V ein $\mathbb{F}$-Vektorraum mit $\dim V = n$.

a) Zeigen Sie: V ist eine endliche Menge. Bestimmen Sie die Mächtigkeit von V in Abhängigkeit von q und n.

b) Wie viele Untervektorräume der Dimension 1 gibt es in V?

Abgabe bis Freitag, 19. November, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat
(Mathematikon, INF 205, 1. Stock)