Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 05. November 2021

Lineare Algebra I

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. (1+1+1+1 Punkte). Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen $\mathbb{Q}$-Vektorräume?

a) $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 \mid x \cdot y \geq 0\} \subseteq \mathbb{Q}^2$.

b) $W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3 \mid x + 2y + 3z = 0\} \subseteq \mathbb{Q}^3$.

c) $W_3 = \{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid f(n+2) = f(n+1) + f(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

d) $W_4 = \{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \mid f(n+2) = 2f(n) + 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

Aufgabe 2. $(1 + 2 + 1$ Punkte). Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Vektoren

$$v_1 = (1, 1, -1, 2), \qquad v_2 = (2, 0, 3, 1), \qquad v_3 = (0, -2, 1, -1)$$

und

$$w_1 = (1, -1, 0, 1), \qquad w_2 = (1, 5, -3, 4).$$

Sei U der von v_1, v_2 und v_3 erzeugte Untervektorraum, d.h. $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

a) Bilden v_1, v_2 und v_3 eine Basis von U?

b) Zeigen Sie: $w_1, w_2 \in U$.

c) Gibt es ein $i \in \{1, 2, 3\}$, so dass w_1, w_2 und v_i eine Basis von U bilden?

Aufgabe 3. $(2 + 2$ Punkte).

a) Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir die Untervektorräume:

$$V := \langle (1, 0, 1), (0, 1, -1) \rangle \quad \text{und} \quad W := \langle (1, 0, -1), (0, 1, 1) \rangle.$$

Geben Sie eine Basis von $V \cap W$ an. Können Sie sich V, W und $V \cap W$ geometrisch veranschaulichen?

b) Zeigen Sie: 1 und $\sqrt{2}$ sind linear unabhängig im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$. (Sie dürfen dabei verwenden, dass $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.) Sind 1 und $\sqrt{2}$ linear unabhängig im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$?

Aufgabe 4. $(2 + 2$ Punkte). Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

a) Seien U_1, U_2 Untervektorräume von V. Zeigen Sie: Ist $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum, dann ist $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

b) Zeigen Sie: Ist V endlich erzeugt, so lässt sich jedes beliebige Erzeugendensystem von V zu einem endlichen Erzeugendensystem verkleinern.

Abgabe bis Freitag, 12. November, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)