Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 29. Oktober 2021

Lineare Algebra I

Übungsblatt 2

Aufgabe 1. (2 + 1 + 1 Punkte). Zu $a, b \in \mathbb{R}$ definieren wir die Abbildung

$$f_{a,b} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$$

und setzen

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{R}) := \{f_{a,b} \mid a \in \mathbb{R}^\times, b \in \mathbb{R}\}.$$

Wie in der Vorlesung bezeichnet $\mathrm{Bij}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Gruppe der bijektiven Selbstabbildungen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ eine Untergruppe von $\mathrm{Bij}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ist.

b) Entscheiden Sie mit Begründung, ob $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ abelsch ist.

c) Finden Sie eine unendliche abelsche Untergruppe H von $\mathrm{Aff}(\mathbb{R})$.

Aufgabe 2. (2 + 2 Punkte).

a) Sei G eine Gruppe mit $a^2 = 1$ für alle $a \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

b) Sei H eine endliche Gruppe. Zeigen Sie: Es existiert ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, so dass $x^n = 1$ für alle $x \in H$ gilt.

Aufgabe 3. (2 + 2 Punkte). Zeigen Sie oder widerlegen Sie:

a) Es gibt keinen endlichen Teilkörper von $\mathbb{R}$.

b) Die Menge $\mathbb{R}^2$ bildet mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned}(a, a') + (b, b') &:= (a + b, a' + b'),\\ (a, a') \cdot (b, b') &:= (ab, a'b')\end{aligned}$$

einen Körper.

Aufgabe 4. (2 + 2 Punkte). Wir betrachten die folgende Teilmenge von $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{Q}(i) := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathbb{Q}(i)$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{C}$.

b) $\mathbb{Q}(i)$ ist kleinstmöglich im folgenden Sinn: Ist K ein weiterer Teilkörper von $\mathbb{C}$, welcher die komplexe Zahl i enthält, so gilt $\mathbb{Q}(i) \subseteq K$.

Abgabe bis Freitag, 05. November, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat
(Mathematikon, INF 205, 1. Stock)