Universität Heidelberg
Mathematisches Institut
Wintersemester 2021/22

Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić
Heidelberg, 22. Oktober 2021

Lineare Algebra I

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. (1+3 Punkte). Sei X eine Menge. Wir bezeichnen das Komplement einer Teilmenge $A \subseteq X$ mit A^c, d.h. wir setzen:

$$A^c := X \setminus A.$$

a) Zeigen Sie: Für alle $A, B \subseteq X$ ist $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ und $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

b) Sei $A \subseteq X$ beliebig. Bestimmen Sie alle $B \subseteq X$ mit $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$.

Aufgabe 2. ($1 + 1 + 2$ Punkte). Untersuchen Sie (mit Begründung) die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y$,

b) $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$,

c) $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x + 2y, 2x - y)$.

Aufgabe 3. (4 Punkte).

a) Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn für alle Teilmengen $A \subseteq X$ die Gleichung $f^{-1}(f(A)) = A$ gilt.

b) Geben Sie ein Beispiel von Mengen X, Y, einer Abbildung $g\colon X \to Y$ und einer Teilmenge $B \subseteq Y$ an, so dass $g(g^{-1}(B)) \neq B$ gilt.

Aufgabe 4. (4 Punkte). Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie:

a) f ist genau dann injektiv, wenn für alle Mengen W und alle Abbildungen $g_1\colon W \to X$ und $g_2\colon W \to X$ aus $f \circ g_1 = f \circ g_2$ bereits $g_1 = g_2$ folgt.

b) f ist genau dann surjektiv, wenn für alle Mengen Z und alle Abbildungen $h_1\colon Y \to Z$ und $h_2\colon Y \to Z$ aus $h_1 \circ f = h_2 \circ f$ bereits $h_1 = h_2$ folgt.

Abgabe bis Freitag, 29. Oktober 2021, 11 Uhr in die Zettelkästen vor dem Dekanat (Mathematikon, INF 205, 1. Stock)