Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić

Seminarprogramm

Rigid-analytische Geometrie
Wintersemester 2019/20

Vortrag 1. *Tates Uniformisierung p-adischer elliptischer Kurven oder: Die Geburt der rigiden Geometrie*

(i) Allgemeines zu elliptischen Kurven: Definition einer elliptischen Kurve, das Gruppengesetz auf einer elliptischen Kurve, die j-Invariante.
(ii) Die Zuordnung $\{\text{Gitter in } \mathbb{C}\} \longrightarrow \{\text{elliptische Kurven über } \mathbb{C}\}, \Lambda \longmapsto E_\Lambda$ und der Isomorphismus $\mathbb{C}/\Lambda \longrightarrow E_\Lambda(\mathbb{C})$ von Riemannschen Flächen und von Gruppen.
(iii) Das Uniformisierungstheorem für elliptische Kurven über $\mathbb{C}$.
(iv) Perspektivwechsel: von $\mathbb{C}/\Lambda$ nach $\mathbb{C}^\times/q^{\mathbb{Z}}$.
(v) Das Analogon von (iv) im p-adischen und Tates Uniformisierungstheorem für p-adische elliptische Kurven.
(vi) Anwendungen des Uniformisierungstheorems im p-adischen.

Der Fokus soll auf (iv)−(vi) liegen.
Literatur: [Mil06] für (i)−(iii), [Ked, p. 4−9] für (iv)−(vi).

Vortrag 2. *Things everyone needs to know in life*

(i) Ultrametrische Räume: Charakterisierung von Cauchy-Folgen und konvergenten Reihen, alle Bälle sind sowohl offen als auch abgeschlossen, totale Unzusammenhängendheit.
(ii) Nichtarchimedische Körper: $\mathbb{Q}_p$ etc., die Wertegruppe ist immer dicht oder diskret in $\mathbb{R}_{>0}$, der Bewertungsring, Fortsetzbarkeit von Bewertungen, Hensels Lemma.
(iii) Die Tate-Algebra T_n über K und die Gauß-Norm, das Maximum-Prinzip, der Weierstraßsche Vorbereitungssatz, T_n ist noethersch und faktoriell, Noether-Normalisierung, Ideale in T_n sind abgeschlossen.
(iv) Definition einer affinoiden Algebra, Restklassennorm, alle Algebrenhomomorphismen zwischen affinoiden Algebren sind stetig.

Literatur: [Ked, p. 10−25], [Bos14].

Vortrag 3. *Affinoide Räume*

(i) Die Supremumsnorm/Spektralnom auf einer affinoiden Algebra, das Maximumsprinzip für die Supremumsnorm.
(ii) Der Hilbertsche Nullstellensatz: $\{\text{Galoisorbits in } \mathbb{B}^n(K^{\mathrm{alg}})\} \cong \mathrm{Max}(T_n)$, die Zariskitopologie.
(iii) Definition eines affinoiden Raumes $\mathrm{Sp}(A)$, Morphismen, die kanonische Topologie.
(iv) Beispiel: affinoide Teilmengen von $\mathbb{P}^1$. Hierauf soll der Fokus liegen.

Literatur: [Ked, p. 35−38] und [FVdP12, §2.1, 2.2] für (iv). Rest aus [Ked] oder [Bos14].

Vortrag 4. *Affinoide Unterbereiche*

(i) Affinoide Unterbereiche, sind offen in der kanonischen Topologie.
(ii) Rationale Bereiche als spezielle Beispiele.
(iii) Der Satz von Gerritzen-Grauert

Literatur: [Ked, p. 49−56], [Bos14, §3.3]

Vortrag 5. *Tates Azyklizitätssatz und Grothendiecktopologien*

(i) Tate-Azyklizität.
(ii) G-Topologien und Grothendiecktopologien, Garben- und Čech-Kohomologie, G-Topologien auf $\mathbb{P}^1$.
(iii) Halme.

Literatur: [Ked, p. 56−59] für (i), [Ked, p. 36−47] und [Bos14, §5.1, 5.2] für (ii), [Bos14, §4.1] für (iii).

Vortrag 6. *Rigide Räume*

(i) Definition lokal G-geringter Räume und rigider Räume, die Kategorie der affinoiden rigiden Räume und die Äquivalenz zu affinoiden Algebren.
(ii) Verklebedaten für rigide Räume und Morphismen zwischen diesen.
(iii) Der Analytifizierungsfunktor und Beispiele für rigide Räume.
(iv) Weitere Beispiele: analytische Tori.

Literatur: [Ked, p. 60−61] für (i), [Bos14, §5.3] für (i) und (ii), [Bos14, §5.4] für (iii), [BRG84, §9.3.4] für (iv).

Vortrag 7. *Tates elliptische Kurven*

(i) Tates Kurven als rigide Räume, Riemann-Roch für Tates Kurven, Tates Kurven sind Analytifizierungen elliptischer Kurve, Uniformisierungstheorem für elliptische Kurven.

Literatur: [FVdP12, §5.1] und [BRG84, §9.7.3].

Vortrag 8. *Kiehls Theoreme A und B*

(i) Kohärente Garben auf affinoiden Räumen.
(ii) Die Theoreme A und B.

Literatur: [Ked, p. 65-66, 72-73], [Bos14, §6.1], [Kie67b].

Vortrag 9. *Rigide GAGA*

(i) The Proper Mapping Theorem.
(ii) Rigide GAGA.

Literatur: [Bos14, §6.3, 6.4] für (i), [Ked, p. 69-72] für (ii), [Kie67a].

Anmerkungen.

- Die Seitenangaben zu [Ked] beziehen sich immer auf die von mir zusammengefügte und durchnummerierte Version.
- Vorträge 8 und 9 sind eventuell Doppelvorträge.

Literatur

[Bos14] Siegfried Bosch. *Lectures on formal and rigid geometry*, volume 2105. Springer, 2014.

[BRG84] Siegfried Bosch, Reinhold Remmert, Ulrich Güntzer. *Non-Archimedian Analysis: a systematic approach to rigid analytic geometry.* Springer, 1984.

[FVdP12] Jean Fresnel, Marius Van der Put. *Rigid analytic geometry and its applications*, volume 218. Springer Science & Business Media, 2012.

[Ked] Kiran Kedlaya. *Introduction to Rigid Analytic Geometry.* Lecture notes for a course at MIT in 2004, `https://kskedlaya.org/18.727/`.

[Kie67a] Reinhardt Kiehl. *Der Endlichkeitssatz für eigentliche Abbildungen in der nichtarchimedischen Funktionentheorie.* Inventiones mathematicae, 2(3):191–214, 1967.

[Kie67b] Reinhardt Kiehl. *Theorem A und Theorem B in der nichtarchimedischen Funktionentheorie.* Inventiones mathematicae, 2(4):256–273, 1967.

[Mil06] James S Milne. *Elliptic curves.* BookSurge, 2006.