Die Langlands-Korrespondenz

Der abschließende Vortrag des Seminars
Lokale Langlands Korrespondenz für GL_2

Milan Malčić

Universität Heidelberg
Arbeitsgruppe Arithmetische Geometrie

11. Februar 2021

Notation

Wir fixieren Notation für den ganzen Vortrag:

- F ein nicht-archimedischer lokaler Körper,
  $\kappa = \mathfrak{o}/\mathfrak{p}$ sein Restklassenkörper,
  $q = \#\kappa$.
- $B = \{\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(F)\}, N = \{\left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in B\}, T = \{\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \in B\}$.
  Für $\sigma \in \mathrm{Rep}(T)$ ist $\boldsymbol{\iota}_B^G(\sigma) := \mathrm{Ind}_B^G(\sigma \otimes \delta_B^{-1/2})$.
- $\mathcal{W}_F$ die Weil-Gruppe von F,
  $\boldsymbol{a}_F \colon \mathcal{W}_F \longrightarrow F^\times$ die Artin-Reziprozitätsabbildung der lokalen Klassenkörpertheorie (wie in [BH06, §29.1]).
  Es ist

$$\begin{aligned} \{\text{ Charaktere auf } F^\times\} &\xrightarrow{\sim} \{\text{ Charaktere auf } \mathcal{W}_F\} \\ \chi &\longmapsto \chi \circ \boldsymbol{a}_F \end{aligned}$$

  ein Isomorphismus.
  Der Charakter $\chi \circ \boldsymbol{a}_F$ wird oft wieder mit χ bezeichnet.

Notation

Sei

- $\mathcal{G}_2(F)$ die Menge der Isomorphieklassen von 2-dimensionalen, halbeinfachen Deligne-Darstellungen von $\mathcal{W}_F$,
- $\mathcal{A}_2(F)$ die Menge der Isomorphieklassen von irreduziblen glatten Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(F)$.

Merkspruch:

"$\mathcal{G}$" für "Galois", also $\mathcal{W}_F$.

"$\mathcal{A}$" für "automorph", also $\mathrm{GL}_2(F)$.

Langlands-Korrespondenz (Theorem 33.1 in [BH06])

Sei ψ ein nicht-trivialer Charakter auf F. Es gibt eine eindeutige Abbildung

$$\boldsymbol{\pi}\colon \mathcal{G}_2(F) \longrightarrow \mathcal{A}_2(F)$$

mit

$$\begin{aligned} L(\chi\boldsymbol{\pi}(\rho), s) &= L(\chi \otimes \rho, s), \\ \varepsilon(\chi\boldsymbol{\pi}(\rho), s, \psi) &= \varepsilon(\chi \otimes \rho, s, \psi) \end{aligned} \tag{$*$}$$

für alle $\rho \in \mathcal{G}_2(F)$ und alle Charaktere χ auf $F^\times$.
Die Abbildung π ist eine Bijektion und ($*$) ist erfüllt für alle nicht-trivialen Charaktere ψ auf F.

Inhalt des Vortrags

Dieser Vortrag gliedert sich wie folgt:

1. Wiederholung relevanter Konzepte:
   - L-Funktionen
   - ε-Faktoren
   - Deligne-Darstellungen

2. Skizze des Beweises der Langlands-Korrespondenz.

Wiederholung zu L-Funktionen

Die Ideen hinter den Definitionen der L-Funktionen können wie folgt grob zusammengefasst werden.

Zunächst definiert man mittels Fourier-Analysis auf $F^\times$ die L-Funktion für Charaktere auf $F^\times$. Darauf aufbauend kann man:

- einerseits mittels Fourier-Analysis auf $\mathrm{GL}_2(F)$ die L-Funktion für irreduzible Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(F)$ definieren;
- andererseits mittels $\boldsymbol{a}_F : \mathcal{W}_F^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\sim} F^\times$ die Definition für Charaktere auf $\mathcal{W}_F$ übertragen.
  Für alle anderen irreduziblen (notwendigerweise endlich-dimensionalen) Darstellungen σ von $\mathcal{W}_F$ setzt man $L(\sigma, s) := 1$.
  Fortsetzung gemäß $L(\sigma_1 \oplus \sigma_2, s) := L(\sigma_1, s)L(\sigma_1, s)$ liefert die Definition für alle endlich-dimensionalen halbeinfachen Darstellungen von $\mathcal{W}_F$.

Warum sind diese Definitionen sinnvoll?

Wir fokussieren uns zunächst auf $\mathcal{W}_F$.
Für endlich-dimensionale Darstellungen (σ, V) von $\mathcal{W}_F$ gibt es auch die *Artinsche L-Funktion*, die durch

$$L(\sigma, s) := \det(1 - \sigma(\Phi)|_{V^{\mathcal{I}_F}} q^{-s})^{-1} \tag{1}$$

definiert wird, wobei Φ ein geometrischer Frobenius in $\mathcal{W}_F$ ist.

Tatsächlich stimmt unsere L-Funktion mit der Artinschen überein!
Warum hat sich aber die Artinsche L-Funktion als ein wichtiges Objekt etabliert, und was war Artins Motivation für die Definition?

Historisches Prototyp einer L-Funktion ist die Riemannsche Zeta-Funktion, die auf $\{s \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(s) > 1\}$ durch

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p \text{ prim}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

gegeben ist. Aus obiger Produktentwicklung und der Tatsache, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ für $s = 1$ divergiert, folgt die Existenz unendlich vieler Primzahlen. (Unabhängig von dem elementaren algebraischen Beweis von Euklid.)

In den 1840er Jahren hatte Dirichlet das Ziel, die Existenz unendlich vieler Primzahlen mit vorgegebener Restklasse $a \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$, $m \geq 2$, zu beweisen.

Dieses Problem ist viel schwieriger und elementare algebraische Methoden reichen nicht.

In Anlehnung an den anlytischen Beweis von vorhin hat Dirichlet die Riemannsche Zeta-Funktion wie folgt verallgemeinert.

Einem Charakter $\chi\colon (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ wird die auf $\{s \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re}(s) > 1\}$ holomorphe Funktion

$$L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-s} = \prod_{p \text{ prim}} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1}$$

zugeordnet, wobei man $\chi(n) := 0$ setzt wenn $(n,m) \neq 1$.
Dirichlet hat diese Funktionen mit dem Buchstaben L bezeichnet und seither werden sie L-Funktionen genannt.
Für den trivialen Charakter χ_0 stimmt $L(s,\chi_0)$ bis auf endlich viele Faktoren mit $\zeta(s)$ überein.
Für $\chi \neq \chi_0$ konvergiert $L(s,\chi)$ sogar für $\operatorname{Re}(s) > 0$. (Idee: $\chi \neq \chi_0 \implies \sum_{g \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times} \chi(g) = 0 \implies (\sum_{n=1}^{m} \chi(n))_m$ ist beschränkt)

Dirichlet hat folgendes bewiesen:

Gilt $L(1,\chi) \neq 0$ für jedes $\chi \neq \chi_0$, dann divergiert $f_a(s) := \sum_{p\equiv a\,(m)} p^{-s}$ für $s = 1$.

Beweis: Mit der Produktentwicklung von $L(s,\chi)$ und der Taylorreihe $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ $(|z| < 1)$ überlegt man sich, dass $\log L(s,\chi) = \sum_p \chi(p)p^{-s} + R(s)$ gilt mit $R(s) := \sum_{n=2}^{\infty} 1/n \sum_p \chi(p)p^{-ns}$. Mit einem Integraltest zeigt man $R(s) = O(1)$, sodass

$$\log L(s,\chi) = \sum_p \chi(p)p^{-s} + O(1) \tag{2}$$

folgt.

Mit $M := (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ und $M^* := \mathrm{Hom}(M, \mathbb{C}^\times)$ gilt dann

$$\frac{1}{\#M} \sum_{\chi \in M^\times} \chi(a^{-1}) \log L(s,\chi) \overset{(2)}{=} \sum_p \underbrace{\frac{1}{\#M} \sum_{\chi \in M^*} \chi(a^{-1})\chi(p)}_{\overset{(3)}{=} \begin{cases} 1, & \text{falls } p = a \text{ in } M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}} p^{-s} + O(1)$$

$$= f_a(s) + O(1)$$

wobei wir die folgende Tatsache benutzt haben:

Für eine endliche Gruppe G und ein $g \in G$ gilt

$$\sum_{\chi \in G^*} \chi(g) = \begin{cases} \#G, & \text{falls } g = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3}$$

Weil $\lim_{s\to 1} \log L(s,\chi_0) = \infty$ und weil $\log L(1,\chi) < \infty$ für alle $\chi \neq \chi_0$, folgt die Divergenz von $f_a(s)$ in $s = 1$ sobald man zeigt, dass $\lim_{s\to 1} \log L(s,\chi) > -\infty$ für alle $\chi \neq \chi_0$. Letzteres ist äquivalent zu $L(1,\chi) \neq 0$ für jedes $\chi \neq \chi_0$. $\square$

Schließlich hat Dirichlet noch gezeigt, dass $L(1,\chi) \neq 0$ für jedes $\chi \neq \chi_0$ gilt und somit den inzwischen nach ihm benannten Primzahlsatz bewiesen.

Um 1920 war die folgende Frage von großem Interesse in der Zahlentheorie: Gegeben eine endliche Galois-Erweiterung L/K eines Zahlkörpers K, gibt es unendlich viele Primideale $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{o}_K$ mit vorgegebenem Frobenius-Automorphismus $(\mathfrak{p}, L/K)$? Genauer: Gegebenen eine Konjugationsklasse C in $\mathrm{Gal}(L/K)$, ist die Menge

$$\{\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{o}_K : \mathfrak{p} \text{ ist unverzweigt und } (\mathfrak{p}, L/K) = C\}$$

unendlich?

Diese Frage wurde mit dem *Čebotarevschen Dichtigkeitssatz* positiv beantwortet. Insbesondere konnte man, im Fall dass $\mathrm{Gal}(L/K)$ abelsch ist, die Surjektivität der Artin-Abbildung der globalen Klassenkörpertheorie

$$\boldsymbol{I}_K^S \longrightarrow \mathrm{Gal}(L/K), \mathfrak{p} \longmapsto (\mathfrak{p}, L/K) \tag{4}$$

folgern, für jede endliche Menge S von Primidealen in $\mathfrak{o}_K$, die alle in L verzweigten Primideale enthält, und die von $\{\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{o}_K : \mathfrak{p} \notin S\}$ erzeugte Untergruppe $\boldsymbol{I}_K^S$ der Gruppe $\boldsymbol{I}_K$ aller gebrochenen Ideale.

Für den Beweis des Dichtigkeitssatzes haben sich analytische Methoden und *Hecke-Weber-L-Funktionen*

$$L(s,\chi) := \sum_{\mathfrak{a}\in \boldsymbol{I}^S, \mathfrak{a}\subseteq \mathfrak{o}_K} \chi(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{-s} = \prod_{\mathfrak{p}\notin S} (1-\chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

als nützlich erwiesen, wobei $N(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{o}_K : \mathfrak{a})$ und $\chi\colon \boldsymbol{C}_{K,S} \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ ein Charakter auf einer gewissen endlichen Faktorgruppe $\boldsymbol{C}_{K,S}$ von $\boldsymbol{I}_K^S$, der sog. *Strahlklassengruppe zum Modul* $\prod_{\mathfrak{p}\in S} \mathfrak{p}$, ist.

(Später haben Chevalley et al. mit Hilfe der Theorie der *Idèlen* und der Maschinerie der Gruppenkohomologie rein algebraische Beweise für die Hauptresultate der Klassenkörpertheorie entdeckt.)

Die bisher diskutierten L-Funktionen involvieren Charaktere auf *abelschen* Gruppen. Um diese L-Funktionen besser zu verstehen, hat Artin in den 1920er Jahren L-Funktionen für Darstellungen möglicherweise *nicht-abelscher* Galois-Gruppen erweitert.
Für eine endliche Galois-Erweiterung L/K eines Zahlkörpers K und eine Darstellung $\rho\colon \operatorname{Gal}(L/K) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ hat er wie folgt die Artinsche L-Funktion definiert. Für jede Stelle v von K kann man $G_{K_v} = \operatorname{Gal}(\overline{K}_v/K_v)$ in $G_K = \operatorname{Gal}(\overline{K}/K)$ einbetten, kanonisch bis auf Konjugation in G_K. Für die lokale Darstellung ρ_v definiert man $L(s, \rho_v)$ wie in (1) und

$$\boldsymbol{L}(\rho, s) := \prod_v L(\rho_v, s) \tag{5}$$

ist dann die Artinsche L-Funktion der (globalen) Darstellung ρ. (Siehe Lemma 30.8 später für eine Konvergenzaussage zu (5).)

Beispiel

Für die zyklotomische Erweiterung $\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}$ gibt es bekannterweise einen Isomorphismus

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}) \tag{6}$$

wobei p auf $(p, \mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ abgebildet wird. Ein Charakter χ auf $\mathrm{Gal}(L/K)$ definiert via Verkettung mit (6) einen Charakter χ' auf $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$. Offensichtlich stimmt die Artinsche L-Funktion $\boldsymbol{L}(\chi, s)$ mit der Dirichletschen $L(s, \chi')$ überein.

Allgemeiner zeigt man in der Klassenkörpertheorie, dass jede Artinsche L-Funktion zu einem Charakter auf einer endlichen abelschen Galois-Gruppe mit einer Hecke-Weber-L-Funktion zu einem Charakter auf einer entsprechenden Strahlklassengruppe übereinstimmt. (Dazu realisiert man die Galois-Gruppe als eine Strahlklassengruppe via der Artin-Abbildung (4).)

Wir haben gesehen, dass die Artinsche L-Funktion alle bisherigen L-Funktionen verallgemeinert!
Außerdem hat sie sehr gute Eigenschaften:

Lemma 30.8 in [BH06]

(1) Sei L/K eine endliche Erweiterung und sei τ eine endlich-dimensionale glatte Darstellung von G_L. Schreibe $\mathrm{Ind}_{L/K}$ für $\mathrm{Ind}_{G_L}^{G_K}$. Dann gilt $\boldsymbol{L}(\mathrm{Ind}_{L/K}\,\tau, s) = \boldsymbol{L}(\tau, s)$.

(2) Sei ρ eine endlich-dimensionale glatte Darstellung von G_K. Das Produkt (5) konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > s_0$ für ein s_0 und setzt sich analytisch fort zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion. Es gilt die Funktionalgleichung

$$\boldsymbol{L}(\rho, s) = \boldsymbol{\varepsilon}(\rho, s)\boldsymbol{L}(\check{\rho}, 1-s)$$

für eine eindeutige null- und pollstellenfreie Funktion $\boldsymbol{\varepsilon}(\rho, s)$.

Insgesamt haben wir uns überzeugt, dass die Artin L-Funktion ein sehr wichtiges Objekt ist!
Warum haben wir die L-Funktionen auf der $\mathcal{W}_F$-Seite dann durch einen Umweg definiert, und nicht direkt durch die Artinsche L-Funktion? Der Grund dafür ist, dass die Fourier-Analysis auf $F^\times$ eine *gemeinsame* Grundlage liefert, auf der wir in beide Richtungen aufbauen können. (Sonst hätten wir keinen Ansatz für die Definition der L-Funktion auf der GL_2-Seite.)
Außerdem liefert uns die Fourier-Analysis einen eleganten Beweis der lokalen Funktionalgleichung, mit der sich wiederum ε-Faktoren definieren lassen!

Wir erinnern uns nun daran, dass im Fall einer irreduziblen Glatten $\mathcal{W}_F$-Darstellung von Dimension ≥ 2, die L-Funktion konstant gleich 1 ist und folglich gar keine Information enthält.
Auf der GL_2-Seite ist die Situation ähnlich im kuspidalen Fall:

Proposition 27.2 in [BH06]

Eine irreduzible glatte Darstellung π von $\mathrm{GL}_2(F)$ ist genau dann kuspidal, wenn $L(\phi\pi, s) = 1$ für alle Charaktere ϕ auf $F^\times$.

Beweis: (Wir beweisen nur eine Richtung.) Sei π nicht-kuspidal. Dann ist π ein Kompositionsfaktor von $\mathrm{Ind}_B^G(\chi)$ für einen Charakter $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ auf T. Dann ist nach [BH06, §9.5] $\phi\pi$ ein Kompositionsfaktor in $\boldsymbol{\iota}_B^G(\phi \cdot \chi)$, wobei $\phi \cdot \chi := \phi\chi_1 \otimes \phi\chi_2$. Wähle $\phi = \chi_2^{-1}$.

Nach Theorem 26.1 (s.u.) gilt entweder

$$L(\phi\pi, s) = L(\chi_1\chi_2^{-1}, s)L(1, s) = L(\chi_1\chi_2^{-1}, s)(1 - q^{-s})^{-1}$$

und dies ist nicht konstant gleich 1 (egal ob $\chi_1\chi_2^{-1}$ unverzweigt ist oder nicht), oder $L(\phi\pi, s) = L(\varphi, s + 1/2)$ für einen unverzweigten Charakter φ auf $F^\times$, also auch nicht konstant gleich 1. $\square$

Theorem 26.1 in [BH06]

Sei $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ ein Charakter auf T und π ein $\mathrm{GL}_2(F)$-Kompositionsfaktor von $\boldsymbol{\iota}_B^G(\chi)$. Für jeden Charakter ψ auf F, $\psi \neq 1$, gilt

$$L(\pi, s) = L(\chi_1, s)L(\chi_2, s) \text{ und } \varepsilon(\varphi, s, \psi) = \varepsilon(\chi_1, s, \psi)\varepsilon(\chi_2, s, \psi)$$

außer wenn $\pi \cong \varphi\,\mathrm{St}_G$ für einen unverzweigten Charakter φ auf $F^\times$. In diesem Sonderfall gilt $L(\pi, s) = L(\varphi, s + 1/2)$ und $\varepsilon(\pi, s, \psi) = -\varepsilon(\varphi, s, \psi)$.

Wegen Proposition 27.2 brauchen wir eine weitere Invariante, die L-Funktion alleine reicht nicht.
Da die ε-Faktoren durch Funktionalgleichungen von L-Funktionen definiert werden, vererben sie automatisch viele gute Eigenschaften von L-Funktionen. Beispielsweise gilt für den globalen Artinschen $\boldsymbol{\varepsilon}$-Faktor das folgende Korollar aus Lemma 30.8:

Im Setting von Lemma 30.8 (1) gilt

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathrm{Ind}_{L/K}\,\tau, s) = \boldsymbol{\varepsilon}(\tau, s)$$

Dies schließt unsere Wiederholung zu L-Funktionen und ε-Faktoren ab.

Die Eindeutigkeitsaussage in der Langlands-Korrespondenz ergibt sich sofort aus dem folgenden Satz:

Der Umkehrsatz [BH06, §27.1]

Sei ψ ein Charakter auf F, $\psi \neq 1$. Seien π_1 und π_2 irreduzible glatte Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(F)$. Es gelte

$$L(\chi\pi_1, s) = L(\chi\pi_2, s) \quad \text{und} \quad \varepsilon(\chi\pi_1, s, \psi) = \varepsilon(\chi\pi_2, s, \psi)$$

für alle Charaktere χ auf $F^\times$. Dann folgt $\pi_1 \cong \pi_2$.

Aus Zeitgründen lassen wir den Beweis weg.

Eine *Deligne-Darstellung* von $\mathcal{W}_F$ ist ein Tripel $(\rho, V, \mathfrak{n})$ bestehend aus einer endlich-dimensionalen glatten $\mathcal{W}_F$-Darstellung (ρ, V) und einem nilpotenten Operator $\mathfrak{n} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$, der $\rho(x)\mathfrak{n}\rho(x)^{-1} = \|x\|\mathfrak{n}$ für alle $x \in \mathcal{W}_F$ erfüllt.

Eine Deligne-Darstellung $(\rho, V, \mathfrak{n})$ heißt halbeinfach (bzw. irreduzibel) wenn (ρ, V) dies ist. Ist $(\rho, V, \mathfrak{n})$ eine irreduzible Deligne-Darstellung, so gilt $\mathfrak{n} = 0$. (Grund: $\ker(\mathfrak{n})$ ist eine $\mathcal{W}_F$-Unterdarstellung und $\ker(\mathfrak{n}) \neq 0$.)

Der nilpotente Operator liefert eine für die Langlands-Korrespondenz essentielle Zusatzinformation: Wir werden ein Beispiel für zwei verschiedene $\mathrm{GL}_2(F)$-Darstellungen σ_1 und σ_2 sehen, deren Bilder $\boldsymbol{\pi}(\sigma_1)$ und $\boldsymbol{\pi}(\sigma_2)$ unter der Langlands-Korrespondenz die gleiche unterliegende $\mathcal{W}_F$-Darstellung haben, sich also nur durch den nilpotenten Operator unterscheiden.

Sei $(\rho, V, \mathfrak{n})$ eine halbeinfache Deligne-Darstellung. Dann ist $V_{\mathfrak{n}} = \ker(\mathfrak{n})$ eine (notwendigerweise halbeinfache) Unterdarstellung von ρ, welche wir auch mit $\rho_{\mathfrak{n}}$ bezeichnen.
Wir setzen

$$L((\rho, V, \mathfrak{n}), s) := L(\rho_{\mathfrak{n}}, s).$$

Die Definition des ε-Faktors möchten wir hier nicht reproduzieren und verweisen stattdessen auf [BH06, §31.3].

Es ist

$$\mathcal{G}_2(F) = \mathcal{G}_2(F)^{\mathrm{irr}} \cup \mathcal{G}_2(F)^{\mathrm{red}}$$

wobei $\mathcal{G}_2(F)^{\mathrm{irr}}$ bzw. $\mathcal{G}_2(F)^{\mathrm{red}}$ die Menge der Isomorphieklassen von irreduziblen bzw. reduziblen Darstellungen in $\mathcal{G}_2(F)$ bezeichnet.
Ähnlich ist

$$\mathcal{A}_2(F) = \mathcal{A}_2(F)^{\mathrm{cus}} \cup \mathcal{A}_2(F)^{\mathrm{nc}}$$

wobei $\mathcal{A}_2(F)^{\mathrm{cus}}$ bzw. $\mathcal{A}_2(F)^{\mathrm{nc}}$ die Menge der Isomorphieklassen von kuspidalen bzw. nicht-kuspidalen Darstellungen in $\mathcal{A}_2(F)$ bezeichnet.
Wie wir bereits festgestellt haben, gilt für $\sigma \in \mathcal{A}_2(F)$ bzw. $\rho \in \mathcal{G}_2(F)$ dass

$$\sigma \in \mathcal{A}_2(F)^{\mathrm{cus}} \iff L(\chi\sigma, s) = 1 \text{ für alle Charaktere } \chi \text{ auf } F^\times$$

bzw.

$$\rho \in \mathcal{G}_2(F)^{\mathrm{irr}} \iff L(\chi \otimes \rho, s) = 1 \text{ für alle Charaktere } \chi \text{ auf } F^\times.$$

Daher teilt sich die Langlands-Korrespondenz notwendigerweise in zwei Korrespondenzen auf, wovon die erste lautet:

Theorem 33.3 in [BH06]

Es gibt eine eindeutige Abbildung

$$\boldsymbol{\pi}\colon \mathcal{G}_2(F)^{\mathrm{red}} \longrightarrow \mathcal{A}_2(F)^{\mathrm{nc}}$$

mit der Eigenschaft

$$L(\chi\pi(\rho), s) = L(\chi \otimes \rho, s)$$

für alle $\rho \in \mathcal{G}_2(F)^{\mathrm{red}}$ und alle Charaktere χ auf $F^{\times}$. Die Abbildung π ist eine Bijektion, und es gilt

$$\boldsymbol{\pi}(\chi \otimes \rho) = \chi\boldsymbol{\pi}(\rho),$$
$$\varepsilon(\boldsymbol{\pi}(\rho), s, \psi) = \varepsilon(\rho, s, \psi).$$

für alle ρ, χ und alle Charaktere ψ auf F, $\psi \neq 1$.

Klassifikationstheorem [BH06, §9.11]

Das folgende ist eine vollständige Liste der Isomorphieklassen von irreduziblen nicht-kuspidalen Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(F)$:

(1) $\iota_B^G(\chi)$, wobei $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ alle Charaktere von T durchläuft, für die $\chi_1\chi_2^{-1}$ nicht einer der beiden Charaktere $x \longmapsto \|x\|^{\pm 1}$ auf $F^\times$ ist;

(2) $\phi \circ \det$, wobei ϕ alle Charaktere von $F^\times$ durchläuft;

(3) $\phi\,\mathrm{St}_G$, wobei ϕ alle Charaktere von $F^\times$ durchläuft.

Je zwei Klassen in der Liste sind verschieden, mit einer Ausnahme: In (1) gilt für $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2$ und $\chi^w := \chi_2 \otimes \chi_1$ dass $\iota_B^G(\chi) \cong \iota_B^G(\chi^w)$.

Beweis von Thm. 33.3: Wir konstruieren die Abbildung $\boldsymbol{\pi}$. Sei $(\rho, V, \mathfrak{n}) \in \mathcal{G}_2(F)^{\mathrm{red}}$. Da ρ halbeinfach ist, gilt $\rho = \chi_1 \oplus \chi_2$ für Charaktere χ_i auf $F^\times$. Eine nilpotente Matrix hat Spur und Determinante gleich Null, also ist $\mathfrak{n} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & -a \end{smallmatrix}\right)$ mit $bc = -a^2$. Die Verträglichkeitsbedingung zwischen $\mathfrak{n}$ und ρ übersetzt sich zu

$$\begin{pmatrix} a & ab \\ c\chi_1(g)^{-1}\chi_2(g) & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \|g\|a & \|g\|b \\ \|g\|c & -\|g\|a. \end{pmatrix}$$

für alle $g \in F^\times$. Insbesondere folgt $a = 0$ und wegen $ab = b$ auch $b = 0$. Daher ist

$$\mathfrak{n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Setze $\chi := \chi_1 \otimes \chi_2$. Nach dem Klassifikationstheorem für $\mathcal{A}_2(F)^{\mathrm{nc}}$ können nur drei Fälle vorkommen:

(1) $\iota_B^G(\chi)$ ist irreduzibel und $\mathfrak{n} = 0$;
(Grund für $\mathfrak{n} = 0$: Wäre $c \neq 0$, so wäre $\chi_1^{-1}\chi_2 = \|\cdot\|$ und folglich $\iota_B^G(\chi)$ reduzibel)

(2) $\iota_B^G(\chi)$ ist reduzibel, $\chi_1(g) = \phi(g)\|g\|^{-1/2}$ und $\chi_2(g) = \phi(g)\|g\|^{1/2}$ für einen Charakter ϕ auf $F^\times$, und $\mathfrak{n} = 0$;

(3) $\iota_B^G(\chi)$ ist reduzibel, $\chi_1(g) = \phi(g)\|g\|^{-1/2}$ und $\chi_2(g) = \phi(g)\|g\|^{1/2}$ für einen Charakter ϕ auf $F^\times$, und $\mathfrak{n} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
(Grund für $\mathfrak{n} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$: Für $c \neq 0$ ist $(\rho, V, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right)) \cong (\rho, V, \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)))$.

Wir definieren $\boldsymbol{\pi}(\rho, V, \mathfrak{n})$ im ersten Fall als $\iota_B^G(\chi)$, im zweiten Fall als $\phi \circ \det$ und im dritten Fall als $\phi\, \mathrm{St}_G$. Nach dem Klassifikationssatz für $\mathcal{A}_2(F)^{\mathrm{nc}}$ ist $\boldsymbol{\pi}$ dann eine Bijektion.

Die gewünschten Eigenschaften von $\boldsymbol{\pi}$ rechnet man nach mit Hilfe von Theorem 26.1. Exemplarisch:
Wir haben gesehen, dass $\phi\,\mathrm{St}_G$ zur Deligne-Darstellung

$$(\phi\|\cdot\|^{-1/2} \oplus \phi\|\cdot\|^{1/2},\ \mathbb{C}^2,\ \mathfrak{n} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right))$$

korrespondiert. Dann ist $\rho_{\mathfrak{n}} = \phi\|\cdot\|^{1/2}$. Andererseits ist $L(\phi\,\mathrm{St}_G, s) = L(\phi, s+1/2)$, also müssen wir zeigen:

$$L(\phi, s+1/2) = L(\phi\|\cdot\|^{1/2}, s).$$

Es ist ϕ genau dann verzweigt, wenn $\phi\|\cdot\|^{1/2}$ verzweigt ist, in welchem Fall $L(\phi, s+1/2) = 1 = L(\phi\|\cdot\|^{1/2}, s)$ gilt. Andernfalls gilt mit einem Primelement $\varpi \in \mathfrak{o}_F$

$$\begin{aligned} L(\phi\|\cdot\|^{1/2}, s) = (1 - \phi(\varpi)\|\varpi\|^{1/2}q^{-s})^{-1} &= (1 - \phi(\varpi)q^{-s-1/2})^{-1} \\ &= L(\phi, s+1/2) \end{aligned}$$

wegen $\|\varpi\| = q^{-1}$. □

Die zweite Korrespondenz lautet:

Theorem 33.3 in [BH06]

Sei ψ ein Charakter auf F, $\psi \neq 1$. Es gibt eine eindeutige Abbildung

$$\boldsymbol{\pi} \colon \mathcal{G}_2(F)^{\mathrm{irr}} \longrightarrow \mathcal{A}_2(F)^{\mathrm{cus}}$$

mit der Eigenschaft

$$\varepsilon(\chi\boldsymbol{\pi}(\rho), s, \psi) = \varepsilon(\chi \otimes \rho, s, \psi) \qquad (*)$$

für alle $\rho \in \mathcal{G}_2(F)^{\mathrm{irr}}$ und alle Charaktere χ auf $F^\times$. Die Abbildung π ist eine Bijektion, und $(*)$ gilt für alle Charaktere ψ auf F, $\psi \neq 1$.

Der Beweis davon verwendet die Klassifikationstheoreme für $\mathcal{A}_2(F)^{\mathrm{cus}}$ aus [BH06, §15 und §20].

Literatur

[BH06] Colin J Bushnell and Guy Henniart.
The local Langlands conjecture for GL(2), volume 335.
Springer Science & Business Media, 2006.