Prof. Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić

# Lokale Langlands-Korrespondenz für $\mathrm{GL}_2$

Seminar im Wintersemester 2020/21

Sei $K$ ein nicht-archimedischer lokaler Körper (z.B. eine endliche Erweiterung des Körpers $\mathbb{Q}_p$ der $p$-adischen Zahlen). Dem Körper $K$ kann man eine gewisse topologische Gruppe $\mathcal{W}_K$ zuordnen, die sogenannte *Weil-Gruppe* von $K$. Die Weil-Gruppe ist zwar eine Untergruppe der absoluten Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ von $K$, trägt aber eine Topologie, die feiner ist als die induzierte Teilraumtopologie von $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$. Die lokale Langlands-Korrespondenz beschreibt, wie die Arithmetik von $K$ in $\mathcal{W}_K$ kodiert ist. Um die lokale Langlands-Korrespondenz für $\mathrm{GL}_2$ zu motivieren, skizzieren wir nun kurz die Äquivalenz zwischen der Korrespondenz für $\mathrm{GL}_1$ und dem Hauptsatz der lokalen Klassenkörpertheorie[1].

Der Hauptsatz der lokalen Klassenkörpertheorie klassifiziert alle endlichen abelschen Erweiterungen von $K$. Dazu wird die *lokale Artin-Abbildung* $\theta\colon K^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ konstruiert. Dieser Homomorphismus ist injektiv, stetig und hat als Bild die Abelisierung $\mathcal{W}_K^{\mathrm{ab}}$, genauer ist

$$\theta\colon K^\times \xrightarrow{\sim} \mathcal{W}_K^{\mathrm{ab}} \tag{$*$}$$

ein Isomorphismus topologischer Gruppen. Mit Hilfe von $\theta$ und seinen Eigenschaften erhält man den Hauptsatz.

Um andererseits die Langlands-Korrespondenz für $\mathrm{GL}_1$ zu formulieren, sei $\mathcal{A}_1(K)$ die Menge der Isomorphieklassen glatter irreduzibler komplexer Darstellungen von $\mathrm{GL}_1(K)$. Sei weiterhin $\mathcal{G}_1(K)$ die Menge aller stetigen Homomorphismen $\mathcal{W}_K \longrightarrow \mathrm{GL}_1(\mathbb{C})$.

**Theorem 1** (Lokale Langlands-Korrespondenz für $\mathrm{GL}_1$)**.** *Es gibt eine natürliche Bijektion zwischen $\mathcal{A}_1(K)$ und $\mathcal{G}_1(K)$.*

Mit allgemeiner Darstellungstheorie bzw. mit den Eigenschaften von $\mathcal{W}_K$ zeigt man

$$\mathcal{A}_1(K) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{lc}}(K^\times, \mathbb{C}^\times) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{G}_1(K) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{lc}}(\mathcal{W}_K^{\mathrm{ab}}, \mathbb{C}^\times),$$

wobei $\mathrm{Hom}_{\mathrm{lc}}$ die lokal konstanten Homomorphismen bezeichnet. Daraus kann man die Äquivalenz von Theorem 1 und $(*)$ folgern.

Ziel des Seminars ist das Analogon von Theorem 1 für $\mathrm{GL}_2$ zu beweisen. Dabei orientieren wir uns an dem Buch *The Local Langlands Conjecture for GL(2)* von Bushnell und Henniart.

Zielgruppe: Personen, die sich für Galois-Theorie, Zahlentheorie oder Darstellungstheorie von Gruppen interessieren. Besonders gut eignet sich das Seminar für Personen, die parallel die Vorlesung *p-adische Hodge-Theorie* oder die Vorlesung *Algebraische Zahlentheorie 2* hören möchten.

Zeit und Ort: Donnerstags, 14-16h. Online über Heiconf.

Vorbesprechung: Die Vorbesprechung fand am 23.09.2020 statt, aber **es sind noch viele Vorträge frei**. Wir bitten alle Interessenten, sich im Müsli in die Sammelgruppe des Seminars einzutragen und sich per E-Mail an mmalcic@mathi.uni-heidelberg.de zu wenden.

Homepage: www.mathi.uni-heidelberg.de/~mmalcic/langlandssem/langlandssem.html oder

[1] Die lokale Klassenkörpertheorie ist Gegenstand der Vorlesung *Algebraische Zahlentheorie 2*.