Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić

# Seminarprogramm

# **Lokale Langlands-Korrespondenz für** $\mathrm{GL}_2$

Wintersemester 2020/21

Die lokale Langlands-Korrespondenz besagt grob, dass $n$-dimensionale Darstellungen der Weil-Gruppe $\mathcal{W}_F$ eines nicht-archimedischen lokalen Körpers $F$ zu Darstellungen der Gruppe $\mathrm{GL}_n(F)$ korrespondieren, und zwar auf eine natürliche Art und Weise. Der Fall $n = 1$ der Korrespondenz ist durch die lokale Klassenkörpertheorie gegeben. In diesem Seminar beschäftigen wir uns mit dem Fall $n = 2$.

Das Seminarprogramm gliedert sich in vier Teile. Teil II und Teil III sind logisch unabhängig voneinander. Da alle Vorträge recht umfangreich sind, hat die vortragende Person viel Freiheit, selbst zu entscheiden, welche Beweise im Detail zu präsentieren, nur zu skizzieren, oder wegzulassen sind.

## Vorträge

Alle §x.y beziehen sich auf [BH06].

### Teil I: Darstellungstheorie lokal-proendlicher Gruppen

#### **Vortrag 1. Lokal-proendliche Gruppen und glatte Darstellungen**

- Lokal-proendliche Gruppen (§1.1-1.4), Charaktere (§1.6).
- Glatte Darstellungen (§2.1), Halbeinfachheit (§2.2).
- Isotypische Komponenten und der Funktor $(\cdot)^\infty$ (§2.3).
- Schurs Lemma und Konsequenzen daraus (§2.6).
- Erwähne, dass $\mathrm{GL}_2(F)$ die Abzählbarkeitsbedingung aus §2.6 erfüllt (vgl. §7.2).

#### **Vortrag 2. Die duale Darstellung und induzierte Darstellungen**

- Die duale Darstellung (§2.8-2.10).
- Induzierte Darstellungen (§2.4), kompakte Induktion (§2.5).
- Halbeinfachheit und Induktion (§2.7).

#### **Vortrag 3. Maße und Dualität**

- Das Haarmaß auf einer lokal-proendlichen Gruppe (§3.1), der Modulcharakter (§3.3).
- Positive semi-invariante Maße auf dem Raum der Nebenklassen (§3.4).
- Das Dualitätstheorem (§3.5).
- Knapper Überblick über die Ergebnisse zur Hecke-Algebra (§4).

**Vortrag 4. Die $L$-Funktion und der $\varepsilon$-Faktor eines Charakters von $F^\times$**
- Einschub zu Charakteren auf $F$ bzw. $F^\times$ (§1.7-1.8).
- Fourier-Theorie auf $F$ (§23.1).
- Die $\zeta$-Funktion und die $L$-Funktion (§23.2-23.3).
- Der $\varepsilon$-Faktor (§23.4).
- Sofern zeitlich möglich: Formeln für die Berechnung des $\varepsilon$-Faktors (§23.5, §23.8).

## Teil II: Die Weil-Gruppe $\mathcal{W}_F$ und ihre Darstellungen

**Vortrag 5. Die Weil-Gruppe $\mathcal{W}_F$ und ihre Darstellungen**
- Die Weil-Gruppe $\mathcal{W}_F$ (§28.1-28.2, §28.4), Galois-Theorie via Weil-Gruppen (§28.5).
- Darstellungen von Weil-Gruppen (§28.6) und Kriterien für Halbeinfachheit (§28.7).
- Deligne-Darstellungen (§31.1-31-2).
- Exkurs: Knapper Überblick über $\ell$-adische Darstellungen (§32.5 Theorem, §32.6 Theorem).

**Vortrag 6. Die $L$-Funktion und der $\varepsilon$-Faktor einer Darstellung von $\mathcal{W}_F$**
- Knappe Zusammenfassung der lokalen Klassenkörpertheorie (§29.1).
- Die $L$-Funktion (§29.2-29.3).
- Der $\varepsilon$-Faktor (§29.4 ohne die Proposition am Ende).
- Der Beweis der Existenz des $\varepsilon$-Faktors (§30.1-30.5, sowie evtl. eine Zusammenfassung von §30.9).

## Teil III: Die lineare Gruppe $\mathrm{GL}_2(F)$ und ihre Darstellungen

**Vortrag 7. Analysis auf $\mathrm{GL}_2(F)$ und die mirabolische Gruppe**
- Die Gruppe $\mathrm{GL}_2(F)$ und ihre Untergruppen $B, N, T, Z$ (§7.1).
- Das Haarmaß auf $\mathrm{GL}_2(F)$ (§7.5), das Haarmaß auf $B$ und der Modulcharakter $\delta_B$ (§7.6).
- Die mirabolische Untergruppe $M \subseteq \mathrm{GL}_2(F)$ und ihre Darstellungen (§8.1-8.3)

**Vortrag 8. Klassifikation der irreduziblen nicht-kuspidalen Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(F)$**
- Kuspidale und nicht-kuspidale Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(F)$, Jacquet-Moduln (§9.1).
- Charaktere auf $\mathrm{GL}_2(F)$ (§9.2).
- Das Irreduzibilitätskriterium (§9.5-9.9).
- Das Klassifikationstheorem (§9.10-9.11).

**Vortrag 9. Die $L$-Funktion und der $\varepsilon$-Faktor einer nicht-kuspidalen Darstellung von $\mathrm{GL}_2(F)$**
- Fourier-Theorie auf $M_{2\times 2}(F)$ (§24.1).
- Die $L$-Funktion und der $\varepsilon$-Faktor (§24.2).
- Der Beweis der Existenz der $L$-Funktion und des $\varepsilon$-Faktors für nicht-kuspidale Darstellungen, nach den Typen aus dem Klassifikationstheorem aus Vortrag 8: (§26.2-26.3), (§26.4-26.6) und (§26.7-26.8).

**Vortrag 10. Klassifikation der irreduziblen kuspidalen Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(F)$, Teil 1**

- $\gamma$-kuspidale Darstellungen (§10.1-10.2).
- Eine Methode zur Konstruktion irreduzibler kuspidaler Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(F)$ (§11.4) mit Beispiel (§11.5).
- Überblick über die Theorie der Strata und die Klassifikation irreduzibler Darstellungen mittels Strata (§13).

**Vortrag 11. Klassifikation der irreduziblen kuspidalen Darstellungen von $\mathrm{GL}_2(F)$, Teil 2**

- Überblick über das Ausschöpfungstheorem (§14.5) und das Klassifikationstheorem (§15.5).
- Überblick über das Parametrisierungstheorem (§20.8).

**Vortrag 12. Die $L$-Funktion und der $\varepsilon$-Faktor einer kuspidalen Darstellung von $\mathrm{GL}_2(F)$ und der Umkehrsatz**

- Der Beweis der Existenz der $L$-Funktion für kuspidale Darstellungen (§24.4-24.5).
- Der Beweis der Existenz des $\varepsilon$-Faktors für kuspidale Darstellungen (§24.6-24.7).
- Der Umkehrsatz (§27.1) mit Beweis im Fall einer nicht-kuspidalen Darstellung (§27.2).

## Teil IV: Die Langlands-Korrespondenz

**Vortrag 13. Die Langlands-Korrespondenz**

- Die lokale Langlands-Korrespondenz für $\mathrm{GL}_2(F)$ (§33 und §34).

# Literatur

[BH06] Colin J Bushnell, Guy Henniart. *The local Langlands conjecture for GL (2)*, volume 335. Springer Science & Business Media, 2006.