

## Seminarprogramm

# Homologische Algebra

Sommersemester 2023

Im Folgenden findet sich eine Auflistung der Vortragsthemen, wesentlichen Vortragsinhalte und der vorgeschlagenen Literatur. Darauf basierend stellen Sie sich den genauen Inhalt für Ihren Vortrag zusammen. Natürlich hilft Ihnen der Betreuer (Milan Malčič) dabei, falls Sie Fragen haben. Treffen Sie sich spätestens eine Woche vor Ihrem Vortrag mit dem Betreuer, um Ihr Vortragskonzept mit ihm durchzusprechen. Sie können auch eine schriftliche Ausarbeitung abgeben (und dabei eventuell die Chance nutzen, um TeX zu lernen -- die Ausarbeitung darf aber auch handschriftlich sein). Die Vorträge sollen jeweils etwa (maximal) 90 Minuten dauern.

### **Vortrag 1. Kategorien und Funktoren** (20.04.23)

Quelle: [Bau, §2.1]:

- Kategorien; Beispiele (die Kategorie der Mengen / der Ringe / der Moduln über einem Ring etc.)
- Funktoren; Beispiele (Vergissfunktoren, der Tensor-Funktor etc.)
- Produkte und Koprodukte von Objekten in Kategorien

### **Vortrag 2. Abelsche Kategorien, Exaktheit und der Tensor-Funktor** (27.04.23)

Quelle: [Bau, §2.2]:

- Kettenkomplexe und exakte Sequenzen in der Kategorie der Moduln [Bau, §1.3 (bis 1.3.1)]
- Abelsche Kategorien; Beispiele (die Kategorie der Moduln über einem Ring / der Kettenkomplexe von Moduln etc.)
- Der Begriff eines exakten Funktors
- Der Tensor-Funktor ist rechtsexakt [Bau, Prop. 1.3.5]; die Definition von flachen Moduln

### **Vortrag 3. Der Hom-Funktor und projektive/injektive Objekte** (04.05.23)

- Der Hom-Funktor ist linksexakt [Wei95, Prop. 1.6.8]
- Projektive Objekte in beliebigen Kategorien; projektive Moduln [Wei95, §2.2 bis 2.2.4] bzw. [Bau, 1.3.2-1.3.4]
- Injektive Objekte in beliebigen Kategorien; injektive Moduln [Wei95, §2.3 bis 2.3.4] bzw. [Bau, 1.3.8-1.3.9]

#### **Vortrag 4. Projektive/injektive Auflösungen und das Fundamentallemma (11.05.23)**

- Projektive und injektive Auflösungen; Existenz genügend vieler projektiver/injektiver Moduln [Bau, §3.1]; siehe auf jeden Fall auch [Wei95, §2.2 und §2.3]
- Homologie und Homotopie von Kettenkomplexen [Bau, §3.2]
- Das Fundamentallemma der Homologischen Algebra [Bau, §3.3]. Bei Weibel heißt das Fundamentallemma „Comparison Theorem“ [Wei95, 2.2.6]

#### **Vortrag 5. Abgeleitete Funktoren und lange exakte Sequenzen (25.05.23)**

- Zielsetzung [Wei95, Remark nach Exercise 2.1.2]: Gegeben einen additiven Funktor  $F$ , gibt es einen sogenannten „ $\delta$ -Funktoren“, der  $F$  fortsetzt?
- Definition abgeleiteter Funktoren und ihre Wohldefiniertheit (hier geht das Fundamentallemma ein!) [Bau, §3.3]
- Die lange exakte Sequenz eines abgeleiteten Funktors [Bau, §3.4]. Für die Herleitung (siehe [Wei95, Theorem 2.4.6]) braucht man:
  - [Bau, Satz 3.4.4] (= [Wei95, Theorem 1.3.1]) zu Kettenkomplexen und langen exakten Sequenzen; Dies beruht auf dem Schlangenlemma [Bau, Lemma 3.4.2] (= [Wei95, S. 1.3.2]).
  - Das Hufeisenlemma [Wei95, 2.2.8]
- Ohne Beweis: [Wei95, Theorem 2.4.7, Exercise 2.4.5]. Erkläre, wie man aus diesen zwei Tatsachen die axiomatische Charakterisierung abgeleiteter Funktoren [Mil, Kapitel II, Appendix A, Remark A.12] folgert.

#### **Vortrag 6. Der abgeleitete Funktor „Tor“ (01.06.23)**

- Azyklische Auflösungen berechnen abgeleitete Funktoren [Wei95, Exercise 2.4.3]
- Definition von Tor und Symmetrie von Tor [Bau, §3.5.1]
- Ergebnisse zu Tor [Wei95, §3.1 und §3.2]; siehe auch [Rot09, §7.1]

#### **Vortrag 7. Der abgeleitete Funktor „Ext“ (15.06.23)**

- Definition von Ext und relevante Ergebnisse [Wei95, §3.3 und §3.4]; siehe auch [Rot09, §7.2]

#### **Vortrag 8. Anwendung: homologische Charakterisierung regulärer lokaler Ringe (22.06.23)**

- Das Ziel ist [Wei95, Main Theorem 4.4.16, Corollary 4.4.18] und die dafür benötigten Inhalte von [Wei95, Kapitel 4]

#### **Vortrag 9. Gruppenkohomologie I (29.06.23)**

- Folgende Paragraphen in [Mil, Kapitel II, §1]:
  - „The category of  $G$ -modules“ und „Definition of the cohomology groups“
  - „Description of the cohomology groups by means of cochains“
  - „The cohomology of  $L$  and  $L^\times$ “
- Anwendung: Kummer-Theorie ([Har, §5])

Es lohnt sich, zusätzlich die entsprechenden Inhalte in [Wei95, Kapitel 6] aufzusuchen.

## Vortrag 10. Gruppenkohomologie II

(06.07.23)

Folgende Paragraphen in [Mil, Kapitel II, §1]:

- „Induced modules“
- „Shapiro’s lemma“
- „Functorial properties of the cohomology groups“
- „The inflation-restriction exact sequence“

Es lohnt sich, zusätzlich die entsprechenden Inhalte in [Wei95, Kapitel 6] aufzusuchen.

## Vortrag 11. Gruppenkohomologie III

(13.07.23)

Folgende Abschnitte in [Mil, Kapitel II]:

- [Mil, §2 „Homology“]
- [Mil, §3 „The Tate Groups“]. Insbesondere wird hier in [Mil, Prop. 3.4] (= [Wei95, Theorem 6.2.2]) die Kohomologie aller endlicher zyklischer Gruppen explizit bestimmt.

Es lohnt sich, zusätzlich die entsprechenden Inhalte in [Wei95, Kapitel 6] aufzusuchen.

## Vortrag 12. Galoiskohomologie

(20.07.23)

- Kohomologie proendlicher Gruppen, etwa nach [Wei95, §6.11] oder [Mil, II §4]
- Crash-Kurs zu lokalen Körpern (Bewertungen, Uniformisierer, Potenzreihenentwicklung, Verzweigung... Beispiel: die  $p$ -adischen Zahlen  $\mathbb{Q}_p$  und Erweiterungen davon)
- Galoiskohomologie unverzweigter Erweiterungen von lokalen Körpern, etwa [Mil, III §1]
- Galoiskohomologie beliebiger Erweiterungen von lokalen Körpern, etwa nach [Mil, III §2].

## Vortrag 13. Kohomologische Beschreibung der Brauergruppe

(27.07.23)

- Definition der relativen Brauergruppe  $\text{Br}(L/K)$  und das relevante Hintergrundwissen für den Isomorphismus  $H^2(\text{Gal}(L/K), L^\times) \xrightarrow{\sim} \text{Br}(L/K)$  [Wei95, Application 6.6.10 und Definition 6.6.11]

## LITERATUR

- [Bau] T. Bauer. *Homologische Algebra und Gruppenkohomologie*. Vorlesungsskriptum, Version 11. März 2013. Online verfügbar unter <https://people.kth.se/~tilmanb/pdf/homalg.pdf>.
- [Har] K. Harper. *Group Cohomology and Kummer Theory*. Notes. Online verfügbar unter <http://www.math.uchicago.edu/~may/VIGRE/VIGRE2010/REUPapers/Harper.pdf>.
- [Hub] A. Huber-Klawitter. *Algebra II*. Vorlesungsskriptum, Version 14. Juli 2003. Online verfügbar unter <https://home.mathematik.uni-freiburg.de/arithgeom/lehre/alt/algebra2-2003.pdf>.
- [Mil] J. Milne. *Class Field Theory*. Lecture notes, version (v4. 03, 2020). Online verfügbar unter <https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/cft.html>.
- [Rot09] J. J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra*. Bd. 2. Springer, 2009.
- [Wei95] C. Weibel. *Homological Algebra*. Cambridge university press, 1995. Online verfügbar unter <https://people.math.rochester.edu/faculty/doug/otherpapers/weibel-hom.pdf>.