

Brauergruppen

Seminar im Sommersemester 2021

In diesem Seminar beschäftigen wir uns zunächst mit der Strukturtheorie gewisser (i.A. nicht-kommutativer) Ringe, nämlich der sogenannten *einfachen* Algebren über einem Körper K . Interessante Beispiele davon sind endliche *Schiefkörper-Erweiterungen* von K , wie z.B. die \mathbb{R} -Algebra \mathbb{H} der Hamiltonschen Quaternionen für $K = \mathbb{R}$. Das erste große Resultat des Seminars ist der Satz von Wedderburn, welcher besagt, dass die einfachen Algebren genau die Matrizenringe über Schiefkörpern sind.

Nach diesem Struktursatz fokussieren wir uns auf einfache K -Algebren, deren Zentrum gleich K ist. (Solche K -Algebren nennt man *zentral*). Nach geeigneter Einteilung in Äquivalenzklassen bilden die zentralen einfachen K -Algebren eine Gruppe, die **Brauergruppe** $\text{Br}(K)$ **von** K . Mit Hilfe des Satzes von Wedderburn werden wir beweisen, dass jede Äquivalenzklasse in der Brauergruppe durch eine eindeutige zentrale Schiefkörper-Erweiterung von K repräsentiert wird, d.h. $\text{Br}(K)$ klassifiziert die zentralen Schiefkörper-Erweiterungen von K . Beispielsweise werden wir dann beweisen, dass $\text{Br}(\mathbb{R}) = \{[\mathbb{R}], [\mathbb{H}]\}$ und somit folgern, dass \mathbb{R} und \mathbb{H} bis auf Isomorphie die einzigen zentralen Schiefkörper-Erweiterungen von \mathbb{R} sind. Neben den Berechnungen von Brauergruppen an konkreten Beispielen werden wir auch eine kohomologische Deutung der Brauergruppe herleiten und untersuchen.

Brauergruppen sind aufgrund ihrer vielfachen Anwendung in der reinen Mathematik auch heute ein Objekt intensiver Forschung. Sofern genügend Interesse besteht, werden wir uns gegen Ende des Seminars damit befassen, wie man einige Resultate der *Klassenkörpertheorie* mit Hilfe der Theorie der Brauergruppe $\text{Br}(K)$ eines endlichen Erweiterungskörpers K/\mathbb{Q} beweisen kann.

LITERATUR:

- I. Kersten, *Brauergruppen*, Universitätsverlag Göttingen 2007. Digitale Version verfügbar unter <https://univerlag.uni-goettingen.de/handle/3/isbn-978-3-938616-89-5>
- F. Lorenz, *Einführung in die Algebra II*, Spektrum Akad. Verlag (Englisch: *Algebra. Volume II: Fields with structure, algebras, and advanced topics*, Springer Universitext 2008).

ZIELGRUPPE: StudentInnen mit Kenntnissen in Linearer Algebra sowie Algebra 1. Die meisten Vorträge lassen sich auch im Master anrechnen. Für die Vorträge gegen Ende des Seminars werden Kenntnisse aus der Algebraischen Zahlentheorie benötigt.

ZEIT UND ORT: Donnerstags, 14-16h. Online über Heiconf oder Webex.

VORBESPRECHUNG: Zur besseren Organisation bitten wir alle InteressentInnen, sich möglichst bald im Müsli in die Sammelgruppe des Seminars einzutragen. Das Datum für die Vorberechung wird, sobald festgelegt, über die Müsli-Gruppe bekannt gegeben.

KONTAKT:

Milan Malčič
INF 205 Raum 03.410
Email: mmalci@mathi.uni-heidelberg.de