Universität Heidelberg
Mathematisches Institut

Prof Dr. Otmar Venjakob
Milan Malčić

Seminarprogramm

Brauergruppen

Sommersemester 2021

Motivierendes: Siehe [Ker07, §0 „Worum geht es?“]. Darüber hinaus interessieren wir uns für zahlentheoretische Anwendungen. Einige Aspekte des Seminars sind auch in der Youtube-Video-Reihe „The Brauer group in number theory“ von Daniel Chan motivierend dargestellt.

Kommentar zur Literatur: Zunächst orientieren wir uns an [Mil, Kapitel IV §§1-3] (welches unabhängig von den vorherigen Kapiteln in [Mil] ist) bzw. an [Ker07]. Später orinentieren wir uns an dem Buch [Lor07] von Lorenz (welches auch den Stoff der anderen beiden Quellen behandelt, allerdings in größerer Allgemeinheit). Zu beachten ist beispielsweise, dass Lorenz im Unterschied zu den anderen Quellen und zu unserem Seminar unendlich-dimensionale Algebren betrachtet. Daher vereinfachen sich viele seiner Argumente in unserem (endlich-dimensionalen) Setting.
Im folgenden beziehen sich alle [Mil, x.y] auf Kapitel IV in [Mil].

Vortrag 1. Einfache K-Algebren

- Definition einer K-Algebra [Ker07, 1.1] oder [Mil, Seite 117].
- Beispiele von K-Algebren: Körpererweiterungen L/K, Polynomringe $K[X_1, \ldots, X_n]$. Für uns relevantere Beispiele: die Matrizenringe $M_n(K)$, Schiefkörper über K. Allgemeiner: Matrizenringe $M_n(D)$ über einem Schiefkörper D über K. Quaternionenalgebren (insbesondere die Hamiltonschen Quaternionen über $\mathbb{R}$).
  Quellen: [Ker07, $1.1 - 1.3$], [Mil, $1.8 - 1.9$].
- Definition einer einfachen K-Algebra und Beispiele. Welche der obigen Beispiele sind einfache K-Algebren? Quellen: [Ker07, 1.6] und [Mil, 1.7].
- Ziel des nächsten Vortrags formulieren: der Struktursatz von Wedderburn [Ker07, 1.11] oder [Mil, $1.15 + 1.20$].
- Vorbereitungen für den Struktursatz von Wedderburn: Moduln und lineare Algebra für Moduln über einem Schiefkörper [Mil, $1.10 - 1.11$]. Einfache und halbeinfache Moduln [Mil, $1.4 - 1.6$].

Vortrag 2. Der Struktursatz von Wedderburn

- Der Struktursatz besteht aus der Existenzaussage [Mil, 1.15] und der Eindeutigkeitsaussage [Mil, 1.20].
- Der Doppelzentralisatorsatz [Mil, 1.13] und der Beweis der Existenzaussage [Mil, $1.13 - 1.16$].
- Der Beweis der Eindeutigkeitsaussage [Mil, $1.17 - 1.20$].

Vortrag 3. Tensorprodukte und zentrale einfache Algebren

- Zentrale K-Algebren [Ker07, 2.1 – 2.3].
- Tensorprodukte von Algebren [Ker07, 2.4] oder [Mil, 2.1 – 2.2]. Beispiele (z.B. ein Tensorprodukt von einfachen Algebren, welches selber nicht einfach ist).
- Das Tensorprodukt zweier zentraler einfacher K-Algebren ist wieder eine solche [Ker07, 2.5 – 2.8].

Vortrag 4. Die Brauergruppe eines Körpers

- Definition der Brauergruppe eines Körpers, ihr funktorielles Verhalten und Beispiele. Quellen: [Ker07, 3.1 – 3.7] oder [Mil, 2.9 und 2.13 – 2.16].
- Charakterisierung von zentralen einfachen K-Algebren [Ker07, 3.8 – 3.9].

Vortrag 5. Der Satz von Skolem-Noether und Beispiele von Brauergruppen

- Der Satz von Skolem-Noether und Folgerungen [Mil, 2.10 – 2.12].
- Die Brauergruppe eines endlichen Körpers [Ker07, 6.1 – 6.3].
- Die Brauergruppe $\mathrm{Br}(\mathbb{R})$ [Ker07, 6.5].

Vortrag 6. Zerfällungskörper und maximale Teilkörper

- Eine weitere Version des Doppelzentralisatorsatzes und ihr Bezug zur vorherigen Version [Mil, 3.1 – 3.2].
- Ein wichtiger Satz über Zerfällungskörper [Mil, 3.6] und Sätze zur Existenz separabler maximaler Teilkörper [Mil, 3.8] und galoisscher Zerfällungskörper [Mil, 3.10]. Quelle: [Mil, 3.1 – 3.10].
- Beispiel: $\mathbb{C}$ ist ein maximaler Teilkörper der Hamiltonschen Quaternionen $\mathbb{H}$. Angabe eines Isomorphismus $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \cong M_2(\mathbb{C})$.

Vortrag 7. Kohomologische Beschreibung der Brauergruppe

- Definition der zweiten Kohomologiegruppe $H^2(G, L^\times)$ zu einer Galois-Erweiterung L/K mit Galoisgruppe G [Ker07, 7.8].
- Der Isomorphismus $H^2(G, L^\times) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}(L/K)$ [Mil, 3.11 – 3.15].

Vortrag 8. Brauergruppen sind Torsionsgruppen

- Brauergruppen sind Torsionsgruppen [Ker07, 9.1 – 9.2].
- Exponent und Index [Ker07, 9.3 – 9.4].
- Primfaktorzerlegung eines Schiefkörpers [Ker07, 9.4 – 9.5].

Vortrag 9. Die relative Brauergruppe im zyklischen Fall

- Für eine endliche zyklische Galois-Erweiterung L/K gilt $\mathrm{Br}(L/K) \cong K^\times/N_{L/K}(K^\times)$ [Ker07, 10.1 – 10.6].
- Anwendungen: ein weiterer Beweis von $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und ein Kriterium für das Zerfallen von Quaternionenalgebren [Ker07, 10.7].

Vortrag 10. Die Brauergruppe eines lokalen Körpers

- Ein Crash-Kurs zu lokalen Körpern.
- Ziel ist es, die Invariantenabbildung $\mathrm{inv}_K\colon \mathrm{Br}(K) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ eines lokalen Körpers K zu definieren und zu zeigen, dass sie ein Isomorphismus ist [Lor07, §31.4 Theorem 4].
- Die wichtigsten Schritte dorthin sind die Gleichheit $\mathrm{Br}(K) = \bigcup_{L/K \text{ unverzweigt}} \mathrm{Br}(L/K)$ [Lor07, §31.4 F2] und die Bestimmung der Gruppe $K^\times/N_{L/K}(K^\times)$ für L/K unverweigt. (Da L/K insbesondere zyklisch ist, hat man nach Vortrag 9 somit $\mathrm{Br}(L/K)$ bestimmt!)
- Falls noch Zeit bleibt, diskutiere die darauffolgenden Ergebnisse aus [Lor07, §31.4].

Vortrag 11. Bezug zur lokalen Klassenkörpertheorie

- Für eine Galois-Erweiterung L/K lokaler Körper mit Galoisgruppe G, definiere die Paarung $K^\times \times G^* \longrightarrow \mathrm{Br}(L/K) \subseteq \mathrm{Br}(K) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ [Lor07, §32, Def. 1]. Der daraus entstehende *Reziprozitätshomomorphismus* $(\cdot, L/K)\colon K^\times/N_{L/K}L^\times \longrightarrow G^{\mathrm{ab}}$ ist ein Isomorphismus [Lor07, §32, Theorem 1]. Dies ist eines der zentralen Ergebnisse der lokalen Klassenkörpertheorie.
- Diskutiere den lokalen Existenzsatz [Lor07, §32, Theorem 2] (optional unter der vereinfachenden Annahme $\mathrm{char}(K) = 0$) und den lokalen Satz von Kronecker-Weber [Lor07, §32, Theorem 3].

Vortrag 12. Das Theorem von Brauer-Hasse-Noether

- Dies ist eines der tiefsten Ergebnisse der algebraischen Zahlentheorie. Es beschreibt die Brauergruppe eines Zahlkörpers, siehe [Roq06, §6.2]. Diskutiere den Beweis und die dafür relevanten Teile von [Roq06, §§4-6]. Als ergänzende Literatur bietet sich Kapitel 18 in [Pie82] an.

Literatur

[Ker07] I. Kersten. *Brauergruppen.* Universitätsverlag Göttingen, 2007. Online verfügbar unter `https://univerlag.uni-goettingen.de/handle/3/isbn-978-3-938616-89-5`.

[Lor07] F. Lorenz. *Algebra: Volume II: Fields with structure, algebras and advanced topics.* Springer Science & Business Media, 2007.

[Mil] J. Milne. *Class Field Theory.* Lecture notes, version (v4. 02, 2013). Online verfügbar unter `https://www.jmilne.org/math/CourseNotes/cft.html`.

[Pie82] R. S. Pierce. *Associative Algebras.* Springer, 1982.

[Roq06] P. Roquette. *The Brauer-Hasse-Noether theorem in historical perspective.* Bd. 15. Springer Science & Business Media, 2006. Online verfügbar unter `https://www.mathi.uni-heidelberg.de/~roquette/brhano.pdf`.