Arithmetik Elliptischer Kurven

Universität Frankfurt
Institut für Mathematik
Marius Leonhardt

Blatt 06
Wintersemester 2024/25
Besprechung am 05.02.2025

Aufgabe 1 (Eigenschaften der $E_r(K)$) Es sei K ein vollständiger, diskret bewerteter Körper und E eine Elliptische Kurve über K, gegeben durch eine ganze Weierstraß-Gleichung, d.h. mit $a_i \in \mathcal{O}_K$. Zeige:

(a) (Lemma 6.1) Ist $P = (x, y) \in E(K) \setminus \{O\}$, so gilt entweder $v(x), v(y) \geq 0$ oder es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ mit $v(x) = -2r$, $v(y) = -3r$.

(b) (Lemma 6.6) Für $r \in \mathbb{N}$ gilt $E_r(K) = \{(x, y) \in E(K) \mid v(x) \leq -2r,\ v(y) \leq -3r\} \cup \{O\}$.

(c) (Lemma 6.12) Es gilt $E_1(K) = \{P \in E(K) \mid \widetilde{P} = \widetilde{O}\}$.

Bonusaufgabe 2 (Minimale Weierstraßgleichung) Es sei $p \geq 5$ und E eine Elliptische Kurve über $\mathbb{Q}_p$.

(a) Zeige, dass E eine minimale Weierstraßgleichung der Form $y^2 = x^3 + ax + b$ mit $a, b \in \mathbb{Z}_p$ hat.

(b) Formuliere Bedingungen an (die p-Bewertung von) a und b, sodass die Gleichung in (a) eine minimale Weierstraß-Gleichung ist.

Aufgabe 3 (Reduktion und Basiswechsel) Es sei $K/\mathbb{Q}_p$ ein lokaler Körper, π ein Uniformisierendes von K und $E/\mathbb{Q}_p$ eine Elliptische Kurve. Der Einfachheit wegen sei $p \geq 5$. Zeige:

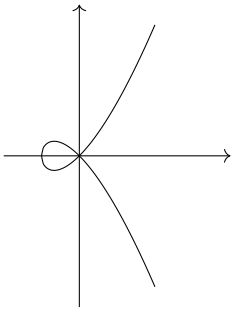
(a) Hat $E/\mathbb{Q}_p$ gute Reduktion (bei p), so hat E/K gute Reduktion (bei π).

(b) Hat $E/\mathbb{Q}_p$ multiplikative Reduktion (bei p), so hat E/K multiplikative Reduktion (bei π).

(c) Finde ein Beispiel, in welchem $E/\mathbb{Q}_p$ additive Reduktion (bei p), aber E/K gute Reduktion (bei π) hat. (In deinem Beispiel muss p in $K/\mathbb{Q}_p$ verzweigen. Wieso?)

Aufgabe 4 (Singuläre Weierstraßgleichung) Es sei K ein Körper mit $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Wir betrachten die über K definierte singuläre Kurve (im $\mathbb{P}^2$)

$$E\colon \quad y^2 = x^2(x+1).$$



(a) Bestimme für $t \in \overline{K}$ alle Schnittpunkte (mit Vielfachheit) der Geraden $y = tx$ mit E.

(b) Finde eine rationale Abbildung $\mathbb{P}^1 \to E$, $t \mapsto (\varphi(t), \psi(t))$, die 0 und ∞ auf den singulären Punkt $(0, 0)$ und 1 auf den Punkt O abbildet.

(c) Zeige damit $E_{ns}(K) \cong K^\times$. (*Hinweis:* Imitiere das Argument aus der Vorlesung für $y^2 = x^3$.)

Bonusaufgabe 5 (Reduktion) Es sei K ein vollständiger, diskret bewerteter Körper mit Restklassenkörper k und E eine Elliptische Kurve über K, gegeben durch eine minimale Weierstraß-Gleichung. Zeige, dass die Reduktionsabbildung

$$E(K) \longrightarrow \widetilde{E}_{\mathrm{ns}}(k), \quad P \longmapsto \widetilde{P}$$

surjektiv ist. (*Hinweis:* Hensels Lemma.)

Aufgabe 6 (Primzahlen schlechter Reduktion) Gegeben seien die folgenden Elliptischen Kurven $E/\mathbb{Q}$. Bestimme jeweils alle Primzahlen p, sodass $E/\mathbb{Q}_p$ schlechte Reduktion hat.

(a) $y^2 + 27y = x^3 - 9x^2$.

(b) $y^2 = x^3 - 7x - 6$.

(c) $y^2 = x^3 + 16$.