

Seminar — Algebraische Zahlentheorie

SOMMERSEMESTER 2020

M. Leonhardt

Eine der interessantesten Fragestellungen der Algebraischen Zahlentheorie ist die Klassifikation aller Erweiterungen eines Zahlkörpers. Im Falle abelscher Erweiterungen lautet eines der spektakulärsten Resultate wie folgt:

Satz 1 (Kronecker–Weber). *Jede endliche, abelsche Erweiterung von \mathbb{Q} ist enthalten in einem Kreisteilungskörper, d. h. in $\mathbb{Q}(e^{2\pi i/n})$ für ein gewisses n .*

Eine explizite Konstruktion aller abelschen Erweiterungen eines Zahlkörpers $\neq \mathbb{Q}$ in Analogie zu Satz 1 ist dagegen fast vollständig unbekannt. Ganz anders ist die Situation im Falle von *lokalen Körpern* K wie zum Beispiel dem Körper \mathbb{Q}_p der p -adischen Zahlen, wobei p eine Primzahl ist. Man erhält ihn, indem man die rationalen Zahlen \mathbb{Q} mit dem p -adischen Betrag

$$\left| p^n \frac{a}{b} \right|_p = p^{-n}, \quad a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, p \nmid a, b,$$

ausstattet und vervollständigt. Dies funktioniert in ähnlicher Art und Weise, wie man den Körper \mathbb{R} aus \mathbb{Q} konstruiert; in Analogie zur Dezimalschreibweise einer reellen Zahl lässt sich beispielsweise jedes $x \in \mathbb{Q}_p$ schreiben als konvergente Reihe

$$x = \sum_{n \gg -\infty} a_n p^n, \quad a_n \in \{0, \dots, p-1\}.$$

Lokale Körper und besonders die **Lubin–Tate Theorie** bilden das Kernstück dieses Seminars. Letztere benutzt spezielle Potenzreihen, sog. *formale Gruppen*, um interessante Erweiterungen von K zu erzeugen. Das Verständnis dieser Erweiterungen führt schließlich zu einer lokalen Version von Satz 1.

Die Methoden des Seminars sind dabei algebraischer und arithmetischer Natur. Wer gerne ohne Konvergenzsorgen mit Potenzreihen rechnet, wer gerne explizit gegebene Körpererweiterungen und deren Galoisgruppen untersucht, oder wer mehr über lokale Körper lernen möchte, für diejenigen ist dieses Seminar geeignet.

Vorkenntnisse: Das Seminar ist als Fortsetzung der Algebraischen Zahlentheorie 1 konzipiert, für einige Vorträge genügen aber auch Kenntnisse der Algebra 1.

Zeit und Raum: Dienstag 14-16 Uhr in SR6 16-18 Uhr (Raum noch unklar).

Vorbesprechung: fand am Donnerstag, den 06.02.2020, von 13:45 bis 14:15 Uhr in SR6 statt.

Vortragseinteilung: ist im Programm zu finden.

Literatur: Wir folgen der Darstellung in [1].

LITERATUR

- [1] Teruyoshi Yoshida. Local class field theory via Lubin-Tate theory. [arXiv Mathematics e-prints](#), page math/0606108, Jun 2006.